THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Minimisation d'une fonction concave sur un ensemble polyédral borné

QUINTIN, Huguette

Award date:
1983

Awarding institution:
Universite de Namur

Minimisation d'une fonction concave sur un ensemble polyédral borné

Promoteur

Mr Nguyen Van Hien

Quintin Huguette

1982 - 1983

Je remercie Monsieur Nguyen Van Hien d'être le promoteur de ce mémoire et Monsieur J.J Strodiot pour sa disponibilité et ses conseils utiles.

Je tiens également à remercier tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pendant mes études et l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

CHAPITRE 3 : APPLICATIONS

INTRODUCTION

Depuis l'apparition des ordinateurs et leur développement intense, de nombreuses méthodes ont été mises au point pour résoudre des problèmes d'optimisation. Une des premières et la plus connue est la méthode du simplexe développée pour minimiser une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.
La solution d'un tel problème lorsqu'elle existe est globale et est un point extrême du polyèdre défini par les contraintes. Cependant, lorsque la fonction objectif n'est plus linéaire, ces deux propriétés ne sont généralement plus vraies : il peut exister des minima locaux et les solutions ne sont plus des points extrêmes.

Dans ce travail, nous allons nous intéresser à une classe de problèmes où la solution est toujours un point extrême. La difficulté sera donc de trouver une solution globale parmi tous ces points extrêmes.
Plus précisément, le problème étudié sera du type :

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & f(x) \\ x & Ax \leq b. \end{cases} \qquad (P)$$

où f est une fonction <u>concave</u> ou <u>quasi-concave</u> définie sur $\mathbb{R}^n$, A est une matrice (m,n) et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$, $(m > n)$.

Un tel problème s'appellera problème de "programmation concave" et intervient notamment dans des problèmes rencontrés par les ingénieurs [5],

Des méthodes de résolution du type "branch and bound" ont été proposées par H. TUY [6], par J. FALK et SOLAND [4].
Une seconde approche du problème est de trouver un polyèdre enveloppant la région admissible et de chercher la solution optimale en effectuant différentes coupes. On supposera que le domaine admissible est borné. [1], [2], [3].

Les méthodes développées dans ce mémoire seront essentiellement du second type.
Quand un premier polyèdre enveloppant la région admissible a été trouvé, on le recoupe par une contrainte du problème (P) afin de trouver une meilleure enveloppe et de se rapprocher ainsi de la solution optimale.
Différentes manières de trouver ces polyèdres enveloppant le domaine admissible seront envisagées.

Dans le premier chapitre, nous étudierons la méthode présentée par James FALK et Karla HOFFMAN en 1976 [2].
Dans cet algorithme, les différents sommets des polyèdres enveloppant la région admissible sont engendrés par des opérations de pivotage.
Des bornes inférieures et supérieures de la valeur optimale de $f(x)$ sont déterminées en cours de recherche et finalement la solution optimale du problème (P) est obtenue en recoupant le polyèdre existant par des contraintes de (P).
cet algorithme est utilisé pour une région admissible ne possédant pas de sommets dégénérés.

Le chapitre II présentera, lui, la méthode de M.R. ARABZADEH. [1] qui est une variante de la méthode de Falk et Hoffman et qui elle tient compte de l'existence éventuelle de sommets dégénérés dans la région admissible.
cette méthode utilisera principalement des résolutions de systèmes linéaires au lieu d'opérations de pivotage.

Dans le chapitre III, nous présenterons des exemples résolus au moyen des deux méthodes.

CHAPITRE 1

METHODE DE

J. FALK et K.HOFFMAN

1. Introduction

Dans cette première partie, nous allons développer une méthode de résolution pour le problème de minimisation d'une fonction concave sur une région admissible borné.

Le problème sera de la forme suivante :

(P)

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & f(x) \\ \quad s.c. & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction concave

A est la matrice des contraintes $(m \times n)$ avec $m > n$.

et la région admissible $S = \{x : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}$ est borné et convexe.

Nous étudierons la méthode présentée par James FALK et Karla HOFFMAN en 1976.

Cette méthode s'applique à un problème du type (P) et

- engendre une suite de sous-problèmes linéaires
- emploie uniquement des opérations de pivotage.

A chaque itération, on déterminera l'enveloppe convexe de la fonction objectif prise sur un ensemble contenant la region admissible S ; on minimisera ensuite sur cette region admissible.
On raffinera alors l'enveloppe convexe et cela jusqu'au moment où l'ensemble enveloppant S sera suffisamment proche de cette region admissible.
On pourra dès lors trouver une solution optimale du problème (P).

2. Méthode de sous estimations successives

2.1. Position du problème - Généralités.

Considérons le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ \quad \text{s.c.} \quad Ax \leq b. \\ \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ concave

et $A : (m \times n)$, $m > n$.

Rappelons que la region admissible est définie par

$$S = \{ x : Ax \leq b, \; x \in \mathbb{R}^n \}$$

et supposons la non vide et bornée.

Supposons également que chaque solution de base du système $Ax + y = b$. est non-dégénérée, c'est-à dire que :

si $\tilde{A}$ est une sous-matrice de A
de dimension $(n \times n)$
non singulière

et si A_i représente une ligne de la matrice A non située dans $\tilde{A}$

alors $A_i \, (\tilde{A})^{-1} \, b \neq b_i$.

Au point de vue géométrique, cela signifie que chaque sommet du polyèdre déterminé par un sous-ensemble de contraintes de (P), se situe exactement sur n hyperplans d'équations $A_j x = b_j$.

Nous possédons également quelques renseignements très utiles sur la solution du problème (P). Ces résultats sont donnés par deux théorèmes

Mais, auparavant, définissons l'enveloppe convexe d'une fonction f.

Définition.1.

L'"enveloppe convexe d'une fonction f" prise sur un sous-ensemble T de son domaine est une fonction F telle que :

1°/ F est une fonction convexe définie sur l'enveloppe convexe T^c de l'ensemble T.

2°/ $F(x) \leq f(x) \quad \forall x \in T$.

3°/ Si h est une fonction convexe sur T^c

et si $h(x) \leq f(x) \quad \forall x \in T$

alors $h(x) \leq F(x) \quad \forall x \in T^c$

Théorème 1.

Soit le problème ($\mathcal{P}$) à résoudre. Soit S la région admissible du problème, où S est non vide et compacte. Alors, il existe un sommet x^* de S qui est solution du problème ($\mathcal{P}$).

Théorème 2.

Si F est l'enveloppe convexe de f prise sur le domaine admissible S, alors un point x^* solution globale du problème ($\mathcal{P}$) minimise aussi F sur S.

Ce théorème 2 indique que chercher une solution x^* du problème ($\mathcal{P}$) revient à trouver le point qui minimise F, l'enveloppe convexe de f prise sur S, sur la région admissible S.
On se ramène donc à un problème de minimisation d'une fonction convexe sur S.
Mais très souvent, l'enveloppe convexe d'une fonction est assez difficile à calculer.
Cependant, si S est assez simple, on pourra exprimer cette enveloppe convexe F en fonction des points extrêmes de S ; cela fera l'objet du théorème 3.

Théorème 3.

> Soient $v^0, v^1, \ldots, v^k$ les sommets d'un polyèdre PO
> L'enveloppe convexe F d'une fonction concave f défini sur PO. s'exprime comme suit :
>
> $$F(x) = \underset{(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)}{\text{minimiser}} \quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(v^i)$$
>
> $$\text{sous} \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i v^i = x \\ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1 \\ \alpha_i \geq 0 \quad i = 0, 1, \ldots k. \end{cases}$$

■ Preuve

1°/ La définition de $F(x)$ indique que la valeur optimale du programme linéaire est une fonction convexe
F est donc bien une fonction convexe sur le polyèdre P.O.

2°/ Montrons que F sous-estime la fonction f sur PO.

Considerons $x \in PO$,

on a $\qquad F(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(v^i)$

par la définition de $F(x)$

$\leq f(x) \left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \right)$

car f est concave sur PO.

$= f(x)$

car $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$ par hypothèse.

F sous estime donc f sur PO.

3°/ Considérons h une fonction convexe sur PO, qui sous-estime f.

Supposons par absurde qu'il existe un point $x \in PO$ tel que $F(x) < h(x)$.

Posons $\bar{\alpha}$ une solution du programme linéaire définissant $F(x)$, on a alors :

$$F(x) < h(x) = h\left(\sum_{i=0}^{k} \bar{\alpha}_i v^i\right)$$

par les contraintes du programme linéaire

$$\leq \sum_{i=0}^{k} \bar{\alpha}_i h(v^i)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k} \bar{\alpha}_i f(v^i)$$

car h sous-estime f sur PO.

$$= F(x)$$

par définition de $F(x)$.

On déduit donc que $F(x) < F(x)$, ce qui est une contradiction.

On a dès lors $h(x) \leq F(x) \quad \forall x \in PO.$

■

Les trois points de la définition 1 sont bien vérifiés et F est donc l'enveloppe convexe de la fonction f prise sur le polyèdre PO.

L'enveloppe convexe d'une fonction prise sur un polyèdre peut donc s'exprimer assez simplement en fonction des sommets de ce polyèdre.

A chaque étape de la recherche, nous formerons un polyèdre qui enveloppe la région admissible S, ce polyèdre sera noté S^k et sera caractérisé de deux manières :

1°/ par un sous-ensemble de contraintes $A_i \cdot x \leq b_i$

2°/ par ses sommets

Dans la suite du raisonnement, nous utiliserons différentes notations ; définissons-les :

<u>Nous noterons</u> :

- cc^k = sous-ensemble de $\{1, \dots m\}$ correspondant aux contraintes définissant le polyèdre S^k ; c'est l'ensemble des contraintes courantes

- V^k = ensemble des sommets du polyèdre S^k.

- J^k = ensemble des indices correspondant aux éléments de V^k.

On aura donc :

$$S^k = \{x : \quad A_i \cdot x \leq b_i \quad , i \in cc^k\}$$

et

$$S^k = \{x : \quad x = \sum_{j \in J^k} \alpha_j \, v^j \quad \text{où} \sum_{j \in J^k} \alpha_j = 1 \text{ et } \alpha_j \geq 0 \quad \forall j \in J^k\}$$

S^k est donc l'ensemble des points qui sont combinaison convexe des sommets v^j de ce polyèdre.

Remarquons qu'un sommet du polyèdre S^k peut être un sommet de S ou non, suivant qu'il vérifie ou non les contraintes restantes, c'est-à-dire les contraintes autres que celles présentes dans CC^k.

On notera :

CR^k = ensemble des contraintes restantes à la $k^{\text{ième}}$ itération.

Nous disposons à présent des principales notions nécessaires au développement de la méthode de FALK et HOFFMAN.

Dans le paragraphe suivant, nous allons étudier les différentes situations qui peuvent se présenter.

2.2. Description de la méthode.

Essayons de trouver un premier polyèdre S^0 envelop-pant la région admissible S.

Pour cela, sélectionnons d'abord un sommet v^0 de S en utilisant la première phase du tableau simplexe et choisissons les sommets $v^1, v^2, \dots v^n$ sur les rayons qui émanent du sommet v^0.

les sommets $v^1, v^2, \dots v^n$ sont donc des voisins de v^0 mais seront tels que le polyèdre S^0, caractérisé par $v^0, v^1, \dots v^n$, englobe la région S.

Voyons ce que cela signifie graphiquement.

Soit le problème (P) à 2 variables et 5 contraintes ces contraintes nous donnent une région admissible S représentée à la figure-1.

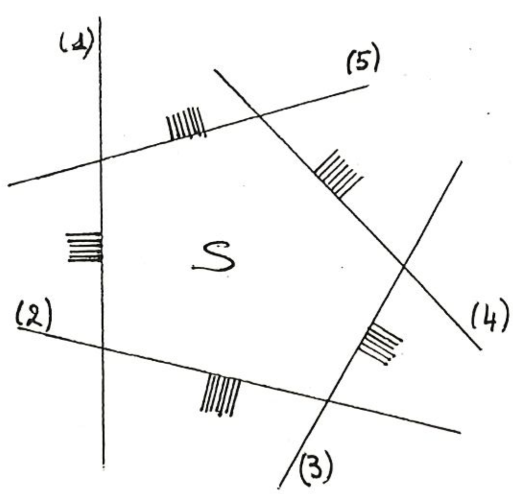


Fig-1.

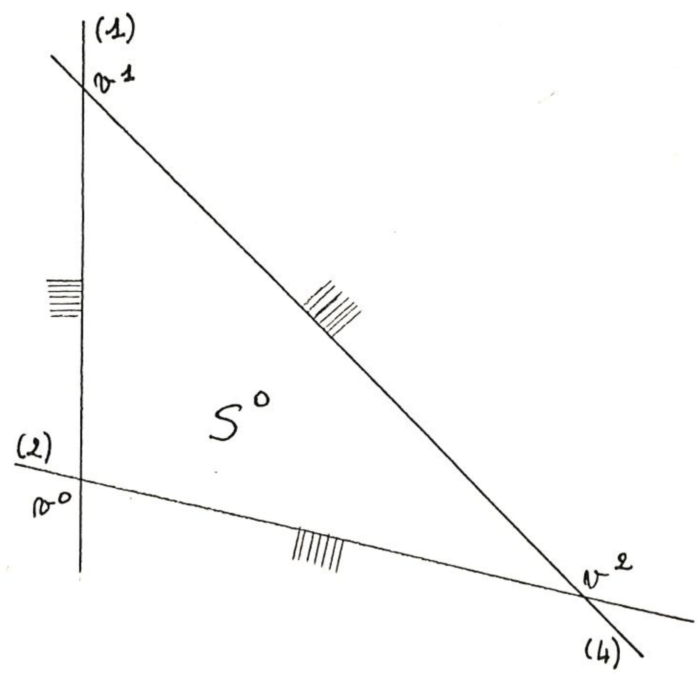


Fig-2.

Pour chacune des contraintes, la partie hachurée correspond au demi-espace rejeté, c'est-à-dire au demi-espace représenté par $A_i x > b_i$

Supposons que les contraintes (1) et (2) nous donnent un premier sommet de S, noté v^0.

Sur les côtés émanant de v^0, nous allons choisir v^1 et v^2 de telle manière que S soit inclus dans S^0.

Pour cela, recoupons ces côtés par la contrainte (4) et nous obtenons la situation représentée à la figure 2.

où $CC^0 = \{1, 2, 4\}$

$V^0 = \{v^0, v^1, v^2\}$

$J^0 = \{0, 1, 2\}$.

En général, nous pouvons donc dire que les sommets $v^1, v^2, \ldots v^n$ se trouvent sur un des hyperplans du système $Ax \leq b$. de départ.

Soit (i) l'équation représentant cet hyperplan, les sommets $v^1, \ldots v^n$ satisfont donc l'équation $A_i x = b_i$.

Si nous disposons du polyèdre S^1 identifié par ses sommets $V^0 = \{v^0, v^1, \ldots v^n\}$, nous pouvons alors calculer

$$u^0 = \min \{ f(v^j) : v^j \text{ est un sommet de } S \text{ et } j \in J^0 \}$$

Remarquons que les sommets $v^1, \dots v^m$ ne sont pas nécessairement tous dans S et pour le calcul de u^0, nous n'utilisons que ceux se trouvant dans S.
Nous montrerons plus tard que u^0 est en fait une borne supérieure de la valeur optimale $z^* = f(x^*)$ du problème (P)

De manière plus générale, supposons que l'on dispose
- d'un polyèdre $S^k \supset S$
- de V^k l'ensemble des sommets du polyèdre
- de J^k l'ensemble des indices associés aux sommets de S^k.

On a vu que la résolution de (P) était équivalente à minimiser l'enveloppe convexe de la fonction objectif f prise sur S.
Or ici, le polyèdre S^k constitue une enveloppe convexe de l'ensemble S et l'enveloppe convexe F de f prise sur S^k s'exprime, en vertu du théorème 3, sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x) = \underset{\alpha}{\text{minimiser}} \sum_{j \in J^k} \alpha_j f(v^j) \\ \\ \text{sous: } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in J^k} \alpha_j v^j = x \\ \\ \sum_{j \in J^k} \alpha_j = 1 \\ \\ \alpha_j \geq 0 \quad \forall j \in J^k \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Or le point x considéré doit se trouver dans la région admissible S ; nous imposerons donc la condition :

$$A x = \sum_{j \in J^k} \alpha_j A v^j \leq b.$$

Nous pouvons à présent résoudre le problème de programmation linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underset{\alpha}{\text{Minimiser}} & \sum_{j \in J^k} \alpha_j f(v^j) \\ \text{sc :} & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in J^k} \alpha_j A v^j \leq b \\ \sum_{j \in J^k} \alpha_j = 1 \\ \alpha_j \geq 0 \quad \forall j \in J^k. \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad (P^k)$$

Supposons que le vecteur α^k soit la solution optimale de (P^k) et z^k la valeur optimale correspondante, on aura alors

$$x^k = \sum_{j \in J^k} \alpha_j^k v^j$$

qui sera le point où la valeur optimale est atteinte.

Identifions les sommets de S^k utilisés dans la représentation du point x^k,

$$A^k = \{ j : \alpha_j^k > 0 , j \in J^k \}$$

a/ Supposons qu'il existe un sommet $v^{j_k} \in V^k$ tel que $\alpha^k_{j_k} > 0$

et $v^{j_k} \notin S$

cela signifie que l'on peut encore trouver un meilleur polyèdre S^{k+1} enveloppant la région admissible S.
Pour cela, on choisit une contrainte $(i_k) \in CR^k$ avec laquelle on va recouper le polyèdre S^k pour engendrer S^{k+1}.

On a alors $\quad CC^{k+1} = CC^k \cup \{i_k\}$

$\quad\quad\quad\quad\quad CR^{k+1} = CR^k \setminus \{i_k\}$

Quand les sommets V^{k+1} du polyèdre S^{k+1} sont déterminés, on peut alors mettre à jour la borne u^k, de la manière suivante:

$$u^{k+1} = \min \{u^k, f(v^t) : v^t \text{ est un nouveau sommet de } S^{k+1} \text{ se situant dans } S\}$$

On résoud ensuite le nouveau problème de programmation linéaire (P^{k+1}) et la recherche se poursuit.

b/ Si par contre, tous les sommets utilisés dans la représentation de x^k sont dans S, c'est-à-dire que $v^j \in S \;, \forall\, j \in A^k$,
alors on s'arrêtera et la solution du problème (P) sera le sommet $v^* \in V^k$ tel que

$$f(v^*) = \min \{f(v^j) : j \in A^k\}$$

Nous justifierons ce critère d'arrêt plus loin mais auparavant analysons la suite des nombres u^k et celle des nombres z^k qui sont solutions des problèmes (P^k).

Nous allons voir que les nombres u^k calculés en cours d'algorithme sont des bornes supérieures de la valeur optimale de (P)

Par contre, les nombres z^k sont des bornes inférieures de $z^* = f(x^*)$ solution optimale du problème (P) de départ.

Théorème 4.

> Soit $u^k = \min \{ f(v^j) : v^j$ est sommet de S^k et de $S \}$
> Alors, les nombres u^k sont des bornes supérieures de la valeur optimale $z^* = f(x^*)$ du problème (P).
> Et, la suite (u^k) est une suite monotone décroissante.

Preuve:

■ On sait que $u^k = \min \{ f(v^j) : v^j$ est sommet de S^k et est dans $S \}$.

ou encore $\qquad u^k = \min\limits_{V^k \cap S} f(x)$

avec V^k l'ensemble des sommets de S^k.

On sait également que $z^* = \min\limits_{S} f(x)$

or $S \subset S^k$,

On obtient donc : $\qquad z^* \leq u^k$.

De plus, il s'agit bien d'une suite décroissante car

$$u^{k+1} \underset{\text{déf.}}{=} \min \{ u^k, f(v^t) : v^t \text{ est sommet de } S^{k+1} \text{ et de } S \}$$

$$\Rightarrow u^{k+1} \leq u^k .$$

■

Théorème 5.

> Les nombres z^k sont des bornes inférieures de z^*, la valeur optimale du problème (P),
> et forment une suite monotone non décroissante.

Preuve

- a/ Les nombres z^k sont solutions optimales du problème (P^k) engendré à la $k^{\text{ième}}$ itération.

Or, le problème (P^k) peut s'énoncer de la manière suivante :
" Trouver le minimum sur S de l'enveloppe convexe de la fonction objectif f prise sur $S^k \supset S$ ".

Par la définition de l'enveloppe convexe d'une fonction, on sait que

$$F^k(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in S^k .$$

or $S \subset S^k$

donc $$F^k(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in S .$$

Dès lors, $$z^k = \min_S F^k(x) \leq \min_S f(x) = z^*$$

$$\Rightarrow \qquad z^k \leq z^* .$$

et z^k est donc bien une borne inférieure de z^* qui est la valeur optimale du problème (P) de départ.

b/ Considérons les enveloppes convexes F^k et F^{k+1} de la fonction f prises sur S^k et sur S^{k+1}.

Par la construction des polyèdres enveloppant la région admissible S, on a $S^{k+1} \subset S^k$

et dès lors,

$$F^{k+1}(x) \geq F^k(x) \qquad \forall x \in S^{k+1} \supset S$$

$$\Rightarrow \min_S F^{k+1}(x) \geq \min_S F^k(x)$$

$$\Rightarrow \qquad z^{k+1} \geq z^k.$$

La suite des nombres z^k est donc bien monotone croissante.

Montrons que $\left[\begin{array}{l} \text{si } S^{k+1} \subset S^k \\ \text{alors } F^{k+1}(x) \geq F^k(x) \quad \forall x \in S^{k+1} \end{array}\right]$

Pour cela, considérons :

F^k l'enveloppe convexe de f prise sur S^k

et F^{k+1} l'enveloppe convexe de f prise sur S^{k+1}

On a :

*) F^k une fonction convexe sur S^{k+1}

car $S^{k+1} \subset S^k$

et par la définition de F^k enveloppe convexe de f sur S^k.

*) $F^k(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in S^k$

par la définition de F^k

d'où $\qquad F^k(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in S^{k+1}$

car $S^{k+1} \subset S^k$.

Dès lors, on obtient $\qquad F^k(x) \leq F^{k+1}(x) \quad \forall x \in S^{k+1}$

par la 3e partie de la définition d'enveloppe convexe d'une fonction. ■

Justifions, à présent, le critère d'arrêt de la méthode de FALK et HOFFMAN.

Théorème 6.

Si tous les sommets v^j ($j \in A^k$) sont dans S, alors le sommet v^* qui satisfait $\min\{f(v^j) : j \in A^k\}$ est une solution globale du problème (P).

Preuve

■ Rappelons que

$$A^k = \{ j : \alpha_j^k > 0 , j \in J^k \}$$

où α^k est la solution optimale de (P^k)

J^k est l'ensemble des indices identifiant les sommets de S^k.

Considérons F^k l'enveloppe convexe de f prise sur S^k

a/ En résolvant le problème (P^k), on a :

$$F^k(x^k) = F^k\Big(\sum_{j\in A^k} \alpha_j^k v^j\Big)$$

$$= \sum_{j\in A^k} \alpha_j^k f(v^j)$$ car x^k est le point où la valeur optimale est atteinte.

$$\geq \min_{j\in A^k} f(v^j) \Big(\sum_{j\in A^k} \alpha_j^k\Big)$$

$$= \min \{ f(v^j) : j \in A^k \} \qquad (1)$$

b/ Soit $x \in S^k$,

on a : $$F^k(x) \leq F^k(v^j) \quad \forall j \in A^k$$

car F^k est convexe sur S^k

et $\{v^j : j \in A^k\} \subset S^k$.

On sait également que

$$F^k(v^j) \leq f(v^j)$$

car F^k sous estime f sur S^k.

Pour $x^k \in S^k$, on a donc :

$$F^k(x^k) \leq F^k(v^j) \leq f(v^j) \quad \forall j \in A^k$$

dès lors,

$$F^k(x^k) \leq \min_{j \in A^k} \{f(v^j)\}$$

ou encore

$$F^k(x^k) \leq \min\{f(v^j) : j \in A^k\} \qquad (2)$$

c/ En regroupant les points (1) et (2), on obtient :

$$F^k(x^k) \geq \min\{f(v^j) : j \in A^k\} \geq F^k(x^k)$$

dès lors,

$$F^k(x^k) = \min\{f(v^j) : j \in A^k\} \underset{\text{par hypothèse}}{=} f(v^*) \quad (3)$$

D'autre part, on sait que $F^k(x)$ est l'enveloppe convexe de f prise sur S^k,

$$\Rightarrow \quad F^k(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in S^k$$

$$\Rightarrow \quad F^k(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in S \text{ car } S \subset S^k \ (4).$$

Et le problème (P^k) nous donne :

$$F^k(x^k) \leq F^k(x) \quad \forall x \in S \qquad (5)$$

Par combinaison de (4) et de (5), on obtient :

$$F^k(x^k) \leq F^k(x) \leq f(x) \quad \forall x \in S$$

Par hypothèse, $v^* \in S$

et on a : $f(v^*) = F^k(x^k) \leq F^k(x) \leq f(x) \quad \forall x \in S$

d'où : $f(v^*) \leq f(x) \quad \forall x \in S.$

ce qui signifie que v^* est un minimum global de la fonction objectif sur S et donc est la solution du problème (P).

■

Remarquons que ce critère d'arrêt est basé sur la concavité de la fonction objectif f.

Nous avons vu que z^k est une borne inférieure de la valeur optimale et que u^k est une borne supérieure de cette valeur $z^* = f(v^*)$.

On a donc généralement

$$z^k \leq z^* \leq u^k \qquad (6)$$

considérons le problème (P^k), nous avons :

$$\begin{aligned} z^k &= \sum_{j \in J^k} \alpha_j^k f(v^j) \\ &\geq \min \{ f(v^j) : j \in A^k \} \\ &= u^k \end{aligned}$$

Nous obtenons donc $$z^k \geq u^k \qquad (7)$$

Le critère d'arrêt correspond dès lors au cas où les points (6) et (7) sont satisfaits, c'est-à-dire que l'on s'arrête quand

$$z^k = u^k = z^*.$$

2.3. Algorithme.

Après avoir décrit la méthode présentée par FALK et HOFFMAN pour résoudre un problème de type (P), nous pouvons à présent décrire l'algorithme qui y correspond.

ETAPE 0.

Choisir un polyèdre S^0 enveloppant la région admissible S.

Identifier les sommets de ce polyèdre et poser $V^0 = \{$sommets de $S^0\}$

Evaluer $u^0 = \min \{ f(v_j)$ où v_j est un sommet de S^0 et de $S\}$

Aller à l'étape 1.

ETAPE 1.

Soit $J^k = \{$indices identifiant les sommets du polyèdre $S^k\}$

$V^k = \{$sommets du polyèdre S^k enveloppant $S\}$

Résoudre le problème linéaire suivant :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
Z^k = \underset{\alpha}{\text{minimiser}} \; \sum_{j \in J^k} \alpha_j \, f(v_j) \\
\text{sc} \left\{
\begin{array}{l}
\sum_{j \in J^k} \alpha_j \, A v_j \leq b \\
\sum_{j \in J^k} \alpha_j = 1 \\
\alpha_j \geq 0 \quad \forall j \in J^k.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
\qquad (P^k)
$$

Soit α^k la solution optimale du problème (P^k) et z^k la valeur optimale correspondante.

Poser

$$x^k = \sum_{j \in J^k} \alpha_j^k v^j$$

$$\text{et} \quad A^k = \{ j \in J^k \text{ tel que } \alpha_j^k > 0 \}$$

Aller à l'étape 2.

ETAPE 2.

• Si $\quad v^j \in S \quad \forall j \in A^k$

alors la solution globale de (P) est le sommet $v^* \in V^k$ tel que $\quad f(v^*) = \min \{ f(v^j) : j \in A^k \}$

STOP.

• Sinon, aller à l'étape 3.

ETAPE 3.

Il existe donc un sommet $v^{j_k} \in V^k$ tel que $\alpha_{j_k}^k > 0$ et $v^{j_k} \notin S$

choisir une contrainte $(i_k) \in CR^k$

et poser $\quad CC^{k+1} = CC^k \cup \{i_k\}$

$$CR^{k+1} = CR^k \setminus \{i_k\}$$

Déterminer les sommets V^{k+1} du polyèdre S^{k+1}

Mettre à jour la borne supérieure u^{k+1}

$$u^{k+1} = \min \{ u^k, f(v^t) : v^t \text{ est un nouveau sommet de } S^{k+1} \text{ et de } S \}$$

Aller à l'étape 1.

Remarquons que l'étape la plus importante et la plus coûteuse de cet algorithme, concerne la détermination des sommets du polyèdre S^{k+1} à partir de S^k et d'une contrainte $(1'_k)$ ajoutée aux contraintes courantes. Nous analyserons cette partie, plus en détails, dans le paragraphe suivant.

2.4. Détermination des sommets du polyèdre S^{k+1}.

Nous disposons de

. CC^k l'ensemble des contraintes courantes

. CR^k l'ensemble des contraintes restantes

. V^k l'ensemble des sommets du polyèdre S^k.

La seconde étape de l'algorithme a déterminé une contrainte (i'_k) que nous allons ajouter aux contraintes courantes.

Séparons l'ensemble V^k en deux sous-ensembles :

. le premier contiendra les sommets de S^k se trouvant également dans la région admissible S.

. le second comprendra les sommets de S^k non dans S, c'est-à-dire les sommets candidats à l'étape 3 de l'algorithme.

a/ Si le sommet v^t que l'on examine est un sommet de S^k vérifiant la contrainte (i'_k), c'est-à-dire

si $\quad A_{i'_k} v^t < b_{i'_k}$

alors v^t sera un sommet du nouveau polyèdre S^{k+1}. Il en sera de même pour chacun des sommets de S^k se trouvant dans S.

b/ considérons un sommet v^t du polyèdre S^k qui ne satisfait pas la nouvelle contrainte (i'_k), c'est-à-dire que

$A_{i'_k} v^t > b_{i'_k}$.

ce sommet v^t ne sera donc pas un des sommets du polyèdre S^{k+1}, mais nous allons déterminer ses sommets voisins dans le polyèdre $\tilde{S}^{k+1}$ où

$$\tilde{S}^{k+1} = \{x : A_{i'_k}\, x > b_{i'_k}\} \cap S^k$$

Les voisins du sommet v^t s'obtiennent en effectuant des opérations de pivotage sur le tableau simplexe représentant le point v^t.

Supposons que $\tilde{v}$ est un sommet voisin de v^t et que

$$A_{i'_k}\, \tilde{v} = b_{i'_k},$$

alors $\tilde{v}$ sera un élément de V^{k+1}, c'est-à-dire qu'il sera un des nouveaux sommets du polyèdre S^{k+1}.

Exemple

Considérons le cas où $\alpha^k = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$V^k = \{v^1, v^2, v^3, v^4, v^5\}$

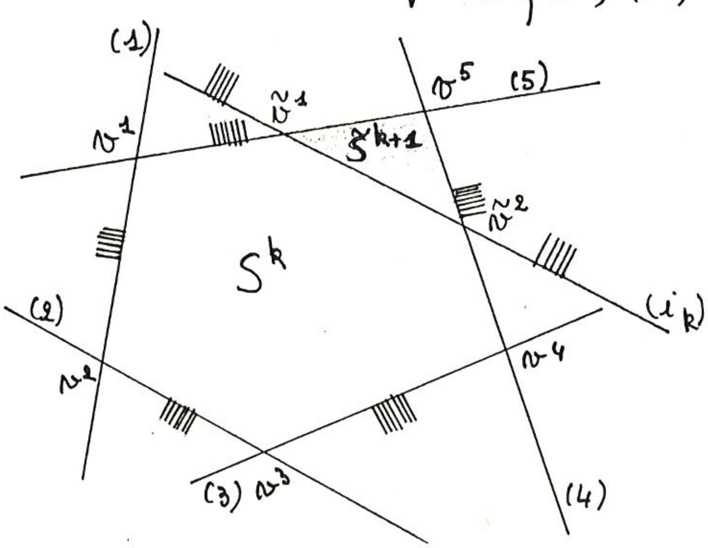


Fig - 3

Recoupons le polyèdre S^k, représenté à la figure 3, par une contrainte (i'_k).

les sommets v^1, v^2, v^3 et v^4 satisfont la contrainte (i'_k) et appartiennent donc à V^{k+1}.

Mais, le sommet v^5 ne se trouve pas dans la région admissible S car ne satisfait pas la contrainte (i'_k).

Essayons d'éliminer ce sommet. v^5.

Les sommets voisins de v^5 sont au nombre de deux nous obtenons en effet $\tilde{v}^1$ et $\tilde{v}^2$ qui vérifient tous deux la contrainte (i'_k) avec égalité,

le sommet v^5 sera dès lors remplacé par les sommets $\tilde{v}^1$ et $\tilde{v}^2$ qui seront notés respectivement v^6 et v^7.

Les sommets du polyèdre S^{k+1} sont donc :

$$V^{k+1} = \{ v^1, v^2, v^3, v^4, v^6, v^7 \}$$

L'algorithme de FALK et HOFFMAN se poursuit dès lors normalement.

En résumé, nous confronterons chacun des sommets de S^k face au critère suivant:

" $(A_{i'_k}\, x - b_{i'_k})$ est-il positif ou non " ?

- Si le critère est satisfait, on engendre tous les voisins de ce sommet considéré, dans le polyèdre $\tilde{S}^{k+1}$ et on garde ceux qui satisfont le critère avec égalité, c'est-à-dire les sommets pour lesquels on a $A_{i'_k}\, x = b_{i'_k}$.
- Si le critère n'est pas satisfait, le sommet considéré sera un des sommets du polyèdre S^{k+1}.

Remarque

L'hypothèse de non-dégénérescence des sommets de S est principalement utilisée lors de cette détermination des sommets V^{k+1} du polyèdre S^{k+1}.

En effet, si l'un des sommets de S^k n'est pas dans S, nous avons vu qu'il fallait déterminer ses sommets voisins et plus particulièrement ceux qui satisfont la contrainte (i'_k). Lors de cette démarche, nous ne retrouverons aucun des sommets de S^k, car selon l'hypothèse de non-dégénérescence, un sommet v^t de S^k ne peut satisfaire l'équation

$$A_{i'_k}\, v^t = b_{i'_k}.$$

En effet, v^t est déterminé par n contraintes du problème (L); soit $\tilde{A}$ la sous matrice $(n \times n)$ de A correspondante, nous avons dès lors:

$$\tilde{A}\, v^t = \tilde{b}$$

ou encore

$$v^t = (\tilde{A})^{-1}\, \tilde{b} \qquad \text{car } \tilde{A} \text{ est non singulière.}$$

et par la non-dégénérescence, nous aurons :

$$A_{i'_k}\, (\tilde{A})^{-1}\, \tilde{b} \neq b_{i'_k} \qquad \text{où } (i'_k) \notin ec^k.$$

Démontrons formellement que tous les sommets du polyèdre S^{k+1}, créé en recoupant S^k par une contrainte (i_k), sont bien obtenus par la méthode explicitée précédemment.

Théorème 7.

> Si $\tilde{v}$ est un sommet de S^{k+1} qui satisfait
> $$A_{i_k}\,\tilde{v} = b_{i_k},$$
> alors $\tilde{v}$ est un voisin dans $\tilde{S}^{k+1}$ d'un sommet $v^t \in S^k$ pour lequel $A_{i_k}\, v^t > b_{i_k}$.

Démonstration.

- Supposons par absurde que le théorème soit faux.

Cela signifie que les voisins $\tilde{v}^1, \dots \tilde{v}^n$ du sommet $\tilde{v}$ dans le polyèdre $\tilde{S}^{k+1}$ satisfont l'équation $A_{i_k}\, x = b_{i_k}$.

Les n vecteurs $(\tilde{v}^i - \tilde{v})$ se trouvent dans le sous-espace de dimension $(n-1)$ d'équation $A_{i_k}\, x = 0$.

Ces n vecteurs engendrent un cône C dont la représentation duale est : $\tilde{A}\, x \leq \tilde{b}$

où
- $\tilde{A}$ est une sous matrice de A comprenant les n rangées correspondant aux contraintes actives en $\tilde{v}$
- $\tilde{A}$ est non singulière.

Posons $\tilde{v} + \lambda d$, $\lambda > 0$, un vecteur non nul de C

alors $\tilde{A}\,(\tilde{v} + \lambda d) \leq \tilde{b}$

or $\tilde{A}\,\tilde{v} = \tilde{b}$ d'où $\tilde{A}\, d \leq 0$.

Nous affirmons que le cône $\mathcal{C}$ possède un intérieur non vide.

Pour cela, utilisons un des théorèmes de l'alternative où :

" Le système $\tilde{A}\, d < 0$ possède une solution

ssi

le système $\tilde{A}^T x = 0$, $\langle e, x \rangle = 1$, $x \geq 0$

n'a pas de solution.

$$e \underset{not}{=} (1\ 1\ 1 \ldots 1)$$

Nous savons que $\tilde{A}$ est non singulière, dès lors pour que $\tilde{A}^T x = 0$, il faut que x soit nul,

ce qui contredit le fait que $\langle e, x \rangle = 1$.

Le système $\tilde{A}^T x = 0$ ne possède donc pas de solution mais le système $\tilde{A}\, d < 0$ en possède une.

Le cône $\mathcal{C}$ possède un intérieur non vide, sa dimension est donc n ; ce qui contredit le fait d'avoir un sous-espace de dimension $(n-1)$.

■

2.5. Méthodes pratiques pour l'application de l'algorithme.

A. Choix d'un premier polyèdre enveloppant S.

Ceci correspond à l'ETAPE 0 de l'algorithme présenté par FALK et HOFFMAN.
Partant des contraintes du problème (P) et ajoutant des variables d'écart à ce problème, nous obtenons par l'algorithme du simplexe, un premier sommet v^0 de la région admissible S.

Le premier polyèdre enveloppant S que l'on peut trouver est un simplexe, c'est-à-dire un ensemble convexe comprenant $(n+1)$ sommets lorsque l'on travaille dans $\mathbb{R}^n$.
Pour trouver ce premier simplexe, nous allons recouper le cône de sommet v^0, formé par n contraintes de (P), par une $(n+1)^{\text{ième}}$ contrainte $A_{i_k} x \leq b_{i_k}$.
Désignons par s_k les variables de base correspondant au tableau simplexe représentant v^0, et par t_k les variables hors base ; nous obtenons alors l'équation suivante :

$$s = \bar{b} - T\,t.$$

où $\bar{b}$ représente le vecteur second membre transformé et

T est une matrice de dimension $(m \times n)$

Si tous les coefficients correspondant aux variables hors base dans la $k^{\text{ième}}$ ligne de T sont positifs, nous recouperons

le cône par la contrainte correspondante, à savoir la $k^{ième}$ contrainte de $(\mathcal{L})$.
les sommets $v^1, \ldots v^n$ voisins de v^0 et situés sur les rayons émanant de v^0, sont alors trouvés en effectuant une simple opération de pivotage sur le tableau simplexe représentant v^0; les pivots successifs seront les éléments $T_{k,i}$ où i représente la colonne d'une variable hors base.

B. Détermination des indices j_k et i_k à l'étape 3 de l'algorithme.

Nous disposons de V^k l'ensemble des sommets

J^k l'ensemble des indices associés aux sommets

$$A^k = \{ j \in J^k \text{ tq } \alpha_j^k > 0 \}$$

supposons que certains sommets v^j, $j \in A^k$, ne sont pas dans la region admissible S.

Quel sommet allons-nous éliminer, afin d'obtenir un meilleur polyèdre enveloppant S ?

Après avoir résolu le problème $(\mathcal{L}^k)$, nous obtenons:

$$F^k(x^k) = \sum_{j \in A^k} \alpha_j^k f(v^j)$$

où certains sommets sont donc non admissibles pour S.

Il paraît dès lors assez naturel de vouloir éliminer le sommet v^{j_k} qui contribue le moins à la valeur $F^k(x^k)$. afin de faire augmenter la valeur de la borne inférieure z^k.

Nous choisirons l'indice j_k du sommet non admissible à éliminer, comme étant l'indice du sommet qui minimise $\alpha_j^k f(v^j)$ pour $j \in A^k$ ou qui minimise $f(v^j)$, $j \in A^k$.

Après avoir choisi d'éliminer le sommet v^{j_k}, nous allons choisir une contrainte $(i_k) \notin cc^k$ qui recoupera l'ensemble polyédral convexe borné disponible à l'étape k. Nous choisirons la contrainte la plus violée par le sommet v^{jk}, c'est-à-dire la contrainte correspondant à la valeur M où

$$M = \max_{i \in CR^k} (A_i v^{jk} - b_i)$$

c. <u>Détermination des sommets de S^{k+1}.</u>

Après avoir choisi le sommet $v^{jk} \in S^k$ mais non dans S, et la contrainte (i_k), nous pourrons trouver les sommets voisins de v^{jk}, satisfaisant la contrainte considérée. Pour cela, nous effectuerons des opérations de pivotage sur le tableau simplexe représentant le sommet v^{jk}.
Nous pivoterons successivement sur chacune des variables hors base correspondant à la ligne (i_k), c'est-à-dire sur chaque

$T_{i_k, l}$ où l = indice d'une variable hors base.

3. Exemple

Considérons le problème suivant :

$$\text{Minimiser } f(x) = -(x_1 - 1)^2 - x_2^2 - (x_3 - 1)^2$$

$$\text{sc} \left[\begin{array}{rrrll} x_1 & + x_2 & - x_3 & \leq 1 & (1) \\ -x_1 & + x_2 & - x_3 & \leq -1 & (2) \\ 12 x_1 & + 5x_2 & + 12x_3 & \leq 34.8 & (3) \\ 12 x_1 & + 12 x_2 & + 7 x_3 & \leq 29.1 & (4) \\ -6 x_1 & + x_2 & + x_3 & \leq -4.1 & (5) \\ -x_1 & & & \leq 0 & (6) \\ & -x_2 & & \leq 0 & (7) \\ & & -x_3 & \leq 0 & (8). \end{array} \right.$$

Par la méthode Simplexe, nous obtenons un premier sommet admissible pour S, ce sommet est noté v^1 et $v^1 = (0.728571 , 0. , 0.271429)$

Le tableau simplexe représentant ce sommet v^1 possède une 4^e ligne où tous les coefficients correspondant aux variables hors base sont strictement positifs ; on recoupe alors le cône de sommet v^1 par la contrainte (4). et on obtient 3 sommets : $v^2 = (0.986713 \,;\, 0.903497 \,;\, 0.916783)$

$v^3 = (\ 107037 \,;\ 0 \ ;\ 2.3222\ )$

$v^4 = (\ 4.42000 \,;\ 0 \ ;\ -3.42000)$

Les sommets v^3 et v^4 sont non admissibles pour S tandis que v^1 et v^2 le sont.

Dès lors $u^1 = -0.8234075$ est la première borne supérieure de la valeur optimale.

En résolvant le problème P^1, nous obtenons α_3 et $\alpha_4 > 0$ où α est la solution optimale du problème.

La borne inférieure $z^1 = -9.054667$

Nous allons alors éliminer le sommet v^4 et la contrainte la plus violée par ce sommet v^4 est la contrainte (1).

Recoupons le polyèdre S^1 par la contrainte (1). et nous obtenons trois nouveaux sommets de S^2 qui sont v^5, v^6 et v^7 dont les composantes sont données dans le tableau de la page 47.

La mise à jour de la borne supérieure nous donne

$$u^2 = -1.$$

La résolution du problème P^2, nous donne un vecteur α où α_3 et α_7 sont strictement positifs.

Le sommet correspondant à α_7, c'est-à-dire v^7 est un sommet de S. mais $v^3 \notin S$.

On va alors éliminer le sommet v^3 et la contrainte la plus violée par v^3 est la contrainte (3)

Dès lors $i_2 = (3)$.

On engendre les sommets voisins de v^3 dans le polyèdre S^2

et en gardant ceux qui vérifient la contrainte (3), on obtient les trois nouveaux sommets v^8, v^9 et v^{10}. qui sont des sommets de S.

La résolution du problème de programmation linéaire P^3 donne une seule valeur non nulle pour les composantes du vecteur solution α : il s'agit de la composante correspondant au sommet v^7 qui est un sommet de S.

La nouvelle borne inférieure de la valeur optimale est de -1.

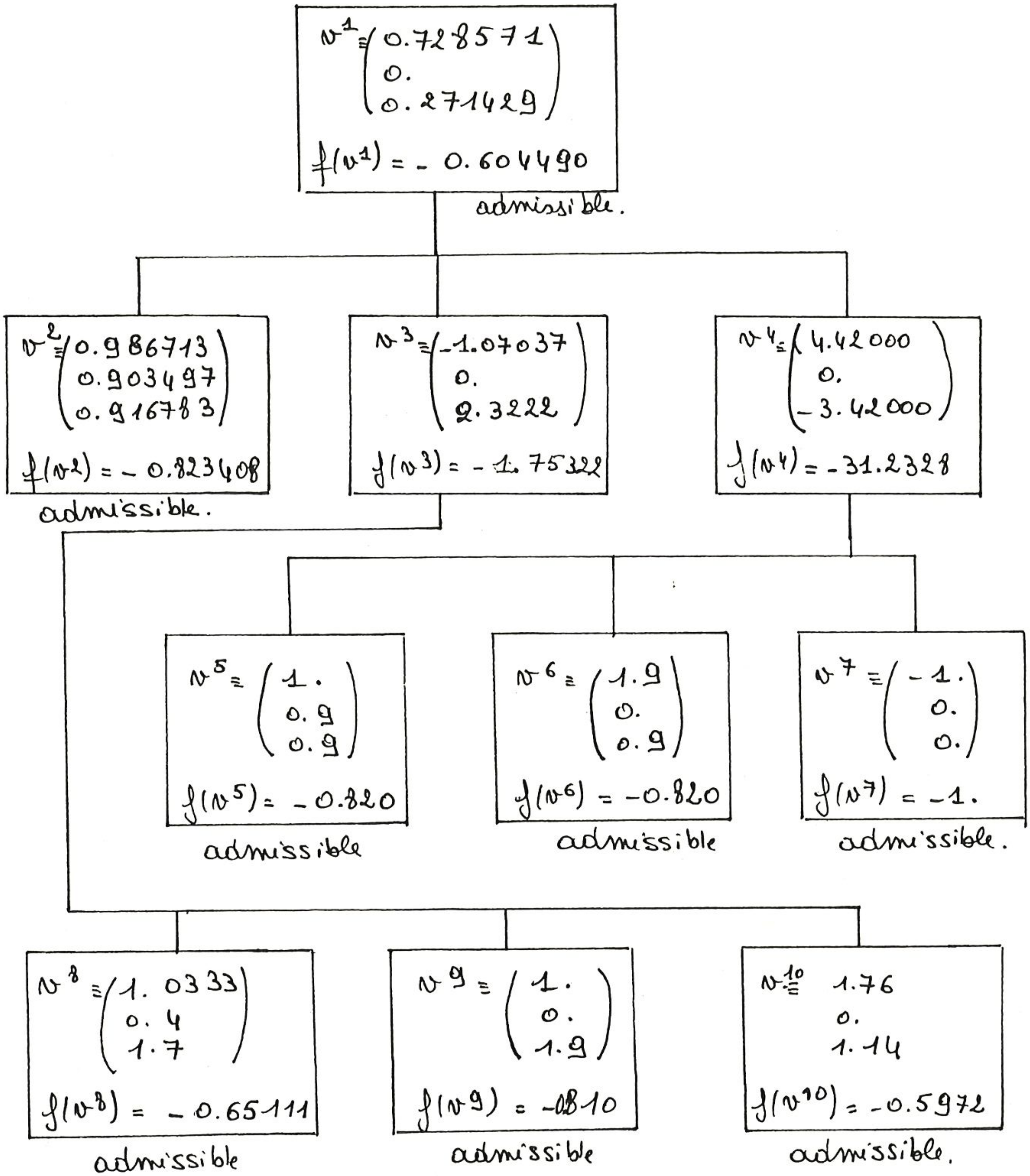
et le critère d'arrêt $z_k^k = u_k^k$ est vérifié.

La solution optimale du problème est alors le sommet v^7 de composantes

$$\begin{cases} x_1 = 1. \\ x_2 = 0. \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

et la valeur optimale de (P) est $z^* = -1$.

Tableau des sommets engendrés par l'algorithme de Falk et Hoffman.



4. Remarques

Après avoir étudié cette méthode, nous constatons quelques points importants, notamment :

- la résolution d'un problème de programmation linéaire (P^k)
- la détermination des sommets du polyèdre S^{k+1} à partir de S^k
- la non-dégénérescence des sommets de la région admissible S.

1/ La méthode engendre une suite de sous-problèmes linéaires (P^k), à chaque itération.

Rappelons ce problème (P^k):

$$\left\{\begin{array}{l} \underset{\alpha}{\text{Minimiser}} \sum_{j \in J^k} \alpha_j f(v^j) \\ \\ \text{sc} : \left\{\begin{array}{l} \sum_{j \in J^k} \alpha_j A v^j \leq b \\ \sum_{j \in J^k} \alpha_j = 1 \\ \alpha_j \geq 0 \ , j \in J^k. \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad (P^k)$$

Remarquons que la taille du problème augmente d'une itération à l'autre.

En effet, J^k identifie les sommets du polyèdre S^k et le nombre de sommets v^j de ce polyèdre augmente de plus en plus lorsque l'on ajoute une nouvelle contrainte aux contraintes courantes.

Cependant, le nombre de contraintes de (P^k) est limité par le nombre de contraintes de P

Le nombre de variables de (P^k) est lui, limité par le nombre de solutions de base du système associé aux contraintes linéaires de (P).

En effet, le nombre maximal de variables correspond au nombre maximal de sommets que l'on peut former à partir des contraintes du problème (P).

Nous avons au maximum $C_m^n = \binom{n}{m}$ sommets dans S, soit le nombre maximal de solutions de base du système.

Remarquons également que le nombre de sous-problèmes à résoudre, c'est-à-dire le nombre d'itérations à effectuer, est limité par le nombre de contraintes du problème (P), à savoir par "m."

Nous commençons, en effet, une nouvelle itération chaque fois que nous ajoutons une nouvelle contraintes à CC^k, l'ensemble des contraintes courantes, et que nous devons ainsi recouper le polyèdre existant et trouver de nouveaux sommets.

Si le problème (P) possède un nombre important de contraintes, nous devrons peut-être alors effectuer de nombreuses itérations pour résoudre le problème.

2/ La détermination des sommets du polyèdre S^{k+1} à partir de S^k et d'une nouvelle contrainte (i'_k) représente également un point important de la recherche.
Si un sommet de S^k ne satisfait pas la contrainte (i'_k), nous devons engendrer tous ses sommets voisins et choisir ceux qui satisfont (i'_k). : ces sommets voisins sont au nombre de n, si nous travaillons dans l'espace $\mathbb{R}^n$, et sont déterminés par des opérations de pivotage.
Dès lors, si la dimension de l'espace de travail augmente et si plusieurs sommets de S^k sont non admissibles pour S, le nombre de pivotages à effectuer peut devenir assez important.

3/ L'hypothèse de non dégénérescence des sommets de S réduit quelque peu le nombre d'applications possibles. Cette hypothèse intervient surtout lors de la détermination des sommets du polyèdre S^{k+1}, comme nous l'avons vu précédemment.

CHAPITRE 2

METHODE DE

M.R. ARABZADEH

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons analyser la méthode de résolution du problème ($\mathcal{L}$), présenté par ARABZADEH, en 1981.

Rappelons le problème ($\mathcal{L}$).

$$\begin{cases} \text{Minimiser} \quad f(x) \\ \quad \text{sous} \begin{cases} Ax \leq b \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \end{cases}$$

où . la région admissible $S = \{x : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}$ est borné et convexe.

. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction concave

. A est une matrice $(m \times n)$, $m \geq n$.
et b est un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

Deux étapes importantes apparaîtront dans la résolution du problème.

Tout d'abord, il s'agira de trouver un polyèdre convexe qui enveloppera la région admissible S.

Ensuite, à partir de ce premier polyèdre convexe enveloppant S, nous chercherons une solution optimale au problème ($\mathcal{L}$).

Avant de développer ces étapes, nous allons rappeler et introduire quelques notions.

2. Notions préliminaires

Définition 1.

Soit K un ensemble de contraintes.
Les éléments de K se rencontrent en certains sommets.
Nous appellerons "sommets intérieurs" les sommets qui sont admissibles pour chacune des contraintes de K.

Pour définir un polyèdre enveloppant la région admissible, nous allons utiliser la notion de côté libre.

Définition 2.

Soit K un ensemble de contraintes se coupant en certains sommets, et engendrant différents côtés.
Nous appellerons "coté libre", un côté qui possède un seul point de terminaison et qui satisfait toutes les contraintes de K.

Remarque:
Un côté libre possède donc pour extrémité un sommet intérieur.
Et, un côté possédant deux extrémités n'est pas un côté libre.

Exemple

Considérons le cas où K comprend 3 contraintes numérotées (1), (2) et (3).

Les sommets formés par l'intersection des contraintes sont notés A, B et C.

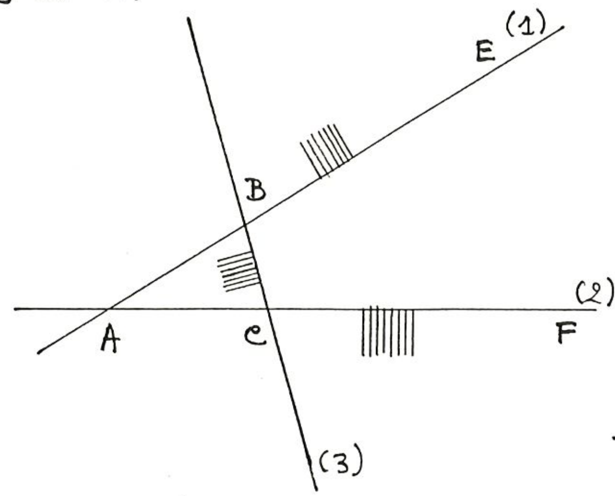


Fig. 1.

La partie correspondant au demi-espace non admissible, déterminé par une contrainte, est hachurée.

A n'est pas un sommet intérieur car ne satisfait pas la contrainte (3). Tandis que les sommets B et C sont des points intérieurs.

Les côtés BE et CF sont des côtés libres car ils possèdent une extrémité admissible qui est B pour le côté BE et C pour le côté CF; et ces deux côtés BE et CF sont admissibles pour les contraintes de K.

Par contre, le côté BC possède deux sommets intérieurs B et C pour extrémités, ce n'est donc pas un côté libre.

Dans cette partie, nous allons surtout travailler à partir des contraintes du problème (P).
Mais, il se peut que des contraintes ne nous apportent guère de renseignements : il serait donc assez intéressant de les détecter dès le départ et d'éliminer ces contraintes dites redondantes.

Définition 3.

La contrainte d_1 est dite "redondante" par rapport à la contrainte d_2
si le demi-espace admissible défini par d_2 est un sous-ensemble du demi-espace admissible défini par d_1.

exemple.

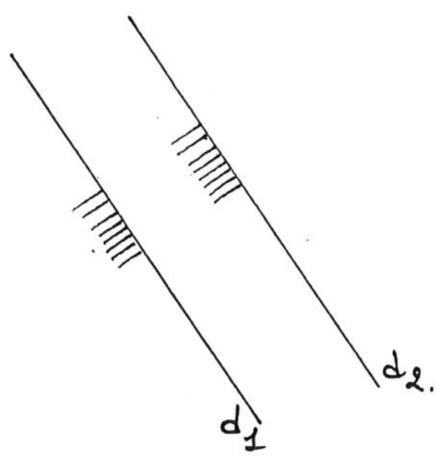


Fig - 2.

La contrainte d_1 est redondante par rapport à la contrainte d_2 car $H_2^- \subset H_1^-$ (si nous désignons par H^- le demi espace admissible déterminé par l'hyperplan H)
Nous pourrons donc ne plus tenir compte de la contrainte d_1 par la suite.

Commençons à présent la recherche d'un polyèdre convexe et compact contenant la région admissible S.
Ce polyèdre pourra avoir des sommets en commun avec la région admissible.

Supposons que les contraintes avec lesquelles nous travaillons sont non redondantes les unes par rapport aux autres.
Dans un espace de dimension n, nous choisirons n contraintes parmi elles de $(\mathcal{L})$; ces contraintes se croisent en un sommet V.
Le premier ensemble polyédral enveloppant la région S que l'on peut former, est donc un cône polyédral.
Mais, il se peut qu'une $(n+1)^{\text{ième}}$ contrainte passe aussi par ce sommet noté V.

<u>Définition 4.</u>

Soit un espace de dimension n.
Soit K un ensemble de n contraintes définissant un cône polyédral de sommet V.
La contrainte $d \notin K$ passant par le sommet V est appelée "<u>contrainte - extra par rapport au cône</u>".

Notons que cette contrainte extra par rapport au cône peut traverser ce cône ou non.
Si elle ne le traverse pas, cela signifie que le cône se

situé entièrement dans un des demi-espaces déterminés par la contrainte d.

Nous pouvons donc rencontrer une des deux situations suivantes pour une contrainte-extra.

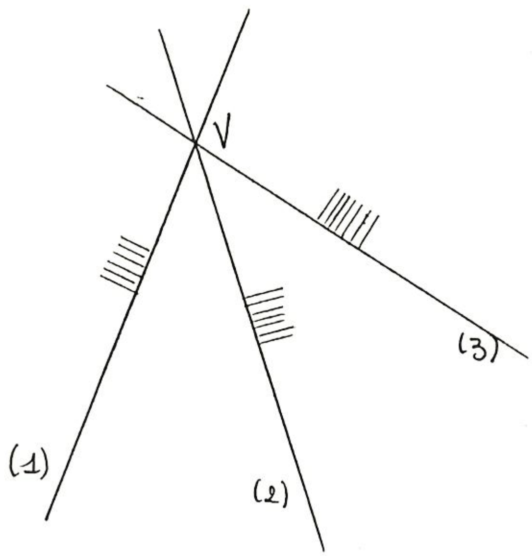


Fig 3-a

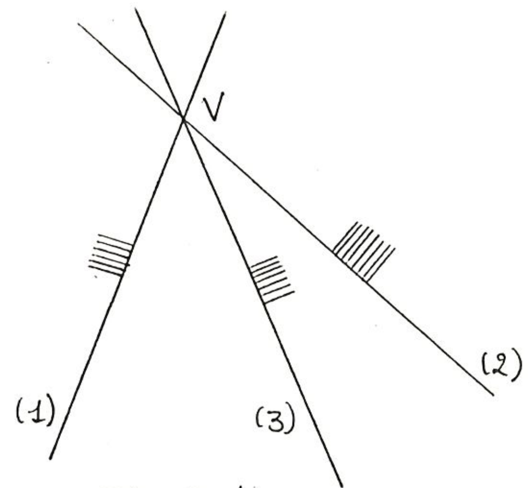


Fig 3-b

Dans (3-a), la contrainte (3) reste extérieure au cône défini par les contraintes (1) et (2) et dont le sommet est V.

Tandis que dans la figure (3-b), la contrainte (3) recoupe le cône de sommet V défini par (1) et (2).

<u>Définition 5.</u>

Soit un espace de dimension n.

Soit K un ensemble de n contraintes définissant un cône polyédral de sommet V.

La contrainte $d \notin K$, qui est une contrainte extra par rapport au cône, est appelée "<u>contrainte-extra non participante</u>" si le cône est un sous-ensemble du demi-

espace admissible déterminé par la contrainte d.
Si ce n'est pas le cas, nous aurons une "contrainte extra participante."

Si nous reprenons la figure (3-a), la contrainte (3) est une "contrainte extra non participante" par rapport au cône de sommet V, tandis que pour la figure (3-b), la contrainte (3) est une "contrainte extra participante".

Nous constatons donc que s'il existe des contraintes-extra non participantes par rapport au cône polyédral disponible, ces contraintes ne nous apportent pas de renseignements utiles.
Nous allons donc comme pour les contraintes redondantes essayer de les détecter et de les supprimer.

3. Recherche d'un polyèdre enveloppant S

3.1. Description de la méthode.

Nous disposons à présent de tous les éléments nécessaires pour développer la methode présentée par ARABZADEH.

Supposons que les contraintes redondantes du problème (L), aient été détectées et supprimées et supposons dès lors que les contraintes non redondantes soient au nombre de "m".
Nous allons chercher à envelopper la région admissible borné S par un polyèdre convexe,
où $S = \{x : Ax \leq b,\ x \in \mathbb{R}^n\}$
La première enveloppe que nous pouvons former est un cône polyédral ayant pour sommet un point de la région admissible ou plus exactement un sommet de S, et ayant pour côtés extrêmes, les cotés émanant de ce sommet.
Pour débuter, il nous faut donc trouver un sommet de S.

Comment trouver ce sommet V ∈ S ?

Choisissons n contraintes parmi les m contraintes du problème (L).
Nous obtenons donc un système de n équations à n inconnues.

Nous allons résoudre ce système linéaire grâce à une méthode assez connue en analyse numérique : il s'agit de la méthode de décomposition L.U.
Si le système à résoudre possède une solution unique, cette solution représentera le sommet V, sommet du cône polyédral enveloppant S.
Si, par contre, le système de n équations à n inconnues n'admet pas de solution unique, nous choisirons d'autres contraintes de (P) et nous résoudrons le nouveau système linéaire obtenu.

Supposons que l'on ait pu résoudre un des systèmes linéaires formés précédemment et que l'on dispose donc d'un sommet de départ V.
Les n contraintes du système correspondant, définissent le cône polyédral enveloppant la région admissible S.
Mais, il se peut que le sommet V, calculé, ne soit pas dans S, nous allons alors essayer de trouver un autre ensemble polyédral de départ, qui possède, lui, un sommet commun à la région admissible S.
Une fois le système de n équations à n inconnues résolu, nous allons examiner si le sommet V se trouve dans S ou non. Pour cela, il suffit de voir si V satisfait ou non chacune des (m-n) contraintes restantes du problème (P)

Posons CR l'ensemble des contraintes restantes et calculons pour chacune de ces contraintes restantes ;

$$M_i = A_i V - b_i \quad , \; i \in CR$$

Il est également intéressant de savoir si le sommet V avec lequel nous travaillons, est dégénéré ou non. Nous pourrons répondre à cette question en examinant les valeurs M_i calculés précédemment.

Définissons un ensemble D qui sera l'ensemble des contraintes restantes passant par le sommet V considéré. Comme D est associé au sommet V, nous noterons l'ensemble par D(V) et :

$$D(V) = \{ i : M_i = 0 , i \in CR \}$$

1er cas. $D(V) \neq \phi$.

Puisque D(V) est différent du vide, cela signifie qu'il existe des contraintes extra par rapport au cône formé par les contraintes définissant le sommet V.

exemple.

considérons les contraintes suivantes

$$\begin{cases} -x_1 \leq 0 & (1) \\ - x_2 \leq 0 & (2) \\ x_1 - 2x_2 \leq 0. & (3) \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5 & (4) \end{cases}$$

Quand on résoud le système formé par les équations (1) et (2), on obtient le sommet V qui a pour composantes $\begin{cases} x_1 = 0. \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Calculons $M_3 = (1 \quad -2)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - 0 = 0.$

$M_4 = -5.$

Dans ce cas, D(V) est donc non vide et la contrainte (3) est une contrainte extra par rapport au cône polyédral de sommet V et défini par les contraintes (1) et (2).

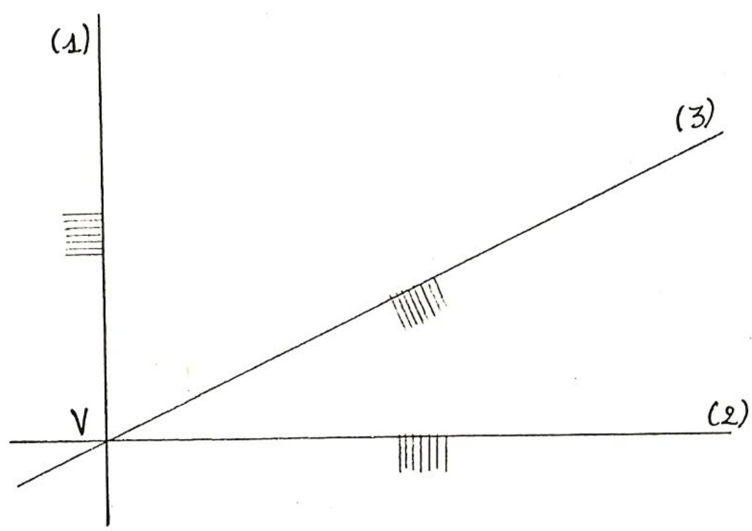


Fig - 4.

De plus, la figure 4 nous montre très bien que la contrainte (3) est une contrainte extra - participante par rapport au cône de sommet V, car elle recoupe le cône défini par (1) et (2).

Généralement, si D(V) est non vide, il faudra déterminer si les contraintes extra que l'on a découvertes sont participantes ou non ; car nous avons vu que les contraintes extra non-participantes peuvent être éliminées.

Supposons que (d) est une contrainte extra par rapport au cône de sommet dégénéré V.
L'hyperplan défini par la contrainte (d) recoupe les n hyperplans correspondant aux contraintes définissant le sommet V.
En coupant ces hyperplans nous obtenons n nouveaux côtés.

- Si certains de ces côtés satisfont chacune des contraintes passant par V,
  alors la contrainte (d) sera une contrainte extra-participante.
- Si, par contre, aucun des nouveaux côtés ne satisfait les contraintes définissant V, cela signifie que le cône polyédral dont nous disposons, se situe entièrement dans un des demi-espaces déterminés par (d) ;
  la contrainte (d) est donc non-participante par rapport au cône de sommet V.

exemple

Considérons les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} -x_1 & & & \leq 0 & (1) \\ & -x_2 & & \leq 0 & (2) \\ & & -x_3 & \leq 0 & (3) \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & \leq 0 & (4) \end{cases}$$

Les contraintes (1), (2) et (3) déterminent un cône polyédral de sommet V ($x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$) et dont les côtés sont les droites d'équations :

$$(12) \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad (13) \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{et } (23) \equiv \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

La contrainte (4) est une contrainte extra par rapport à ce cône de sommet V, mais est-ce une contrainte participante ou non ?

L'hyperplan d'équation (4) recoupe chacun des hyperplans (1), (2) et (3) ; nous obtenons dès lors 3 nouveaux côtés qui sont donnés par les équations suivantes :

$$(14) \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(24) \equiv \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(34) \equiv \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Représentons cela graphiquement :

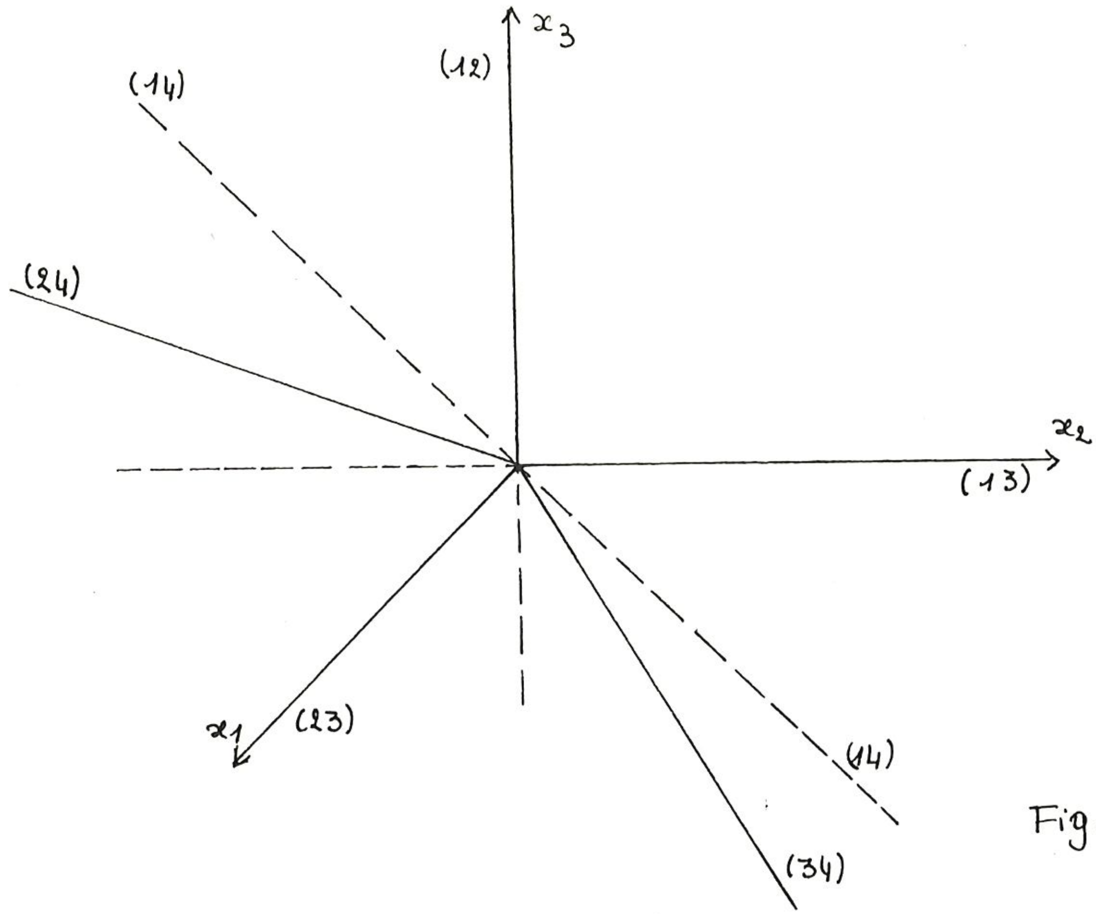


Fig-5.

Les côtés notés (12), (13), (24) et (34) satisfont chacune des contraintes courantes.

Mais les côtés (23) et (14) sont non admissibles pour au moins une des contraintes.

La contrainte (4) est donc une contrainte extra par rapport au cône de sommet V et est participante.

2e cas $\quad D(V) = \phi$

Rappelons que l'ensemble $D(V)$ identifiait les contraintes restantes passant par le sommet V :

$$D(V) = \{ i \; : \; M_i = 0 \; , \; i \in CR \}$$

où $\qquad M_i = A_i V - b_i , \quad i \in CR.$

Dans ce cas, nous pouvons calculer :

$$M = \max_{i \in CR} M_i$$

et M sera non nul puisque $D(V) = \phi$.

Cela signifie donc que le sommet V est un sommet non dégénéré.

La contrainte correspondant à la valeur M sera jointe à l'ensemble des contraintes courantes disponible.

Rappelons que les contraintes courantes sont celles qui forment l'ensemble polyédral enveloppant la région admissible S.

Comme dans le premier chapitre, nous noterons :

CC l'ensemble des contraintes courantes.

Puisque M est non nul, deux cas peuvent se présenter : soit M est strictement positif, soit M est strictement négatif.

Nous allons étudier chacun de ces cas séparément.

$\boxed{M < 0}$

Nous connaissons donc un sommet V non dégénéré, déterminé par les contraintes courantes CC,
et nous avons calculé pour chacune des contraintes restantes

$$M_i = A_i V - b_i \quad , i \in CR$$

et

$$M = \max_{i \in CR} M_i .$$

Comme M est négatif, cela signifie que chaque M_i, $i \in CR$, est aussi négatif : le sommet V satisfait donc chacune des contraintes restantes et est donc un des sommets de la région admissible S.
Nous garderons dès lors ce sommet V ainsi que les contraintes qui le définissent et forment un ensemble polyédral enveloppant S.
Nous pourrons alors poursuivre notre recherche pour trouver un polyèdre convexe enveloppant S.

$\boxed{M > 0}$

Comme pour le cas où $M < 0$, nous disposons d'un sommet V non dégénéré et déterminé par n contraintes du problème (P) qui sont les contraintes courantes.

Nous avons : $M_i = A_i V - b_i \quad , i \in CR$

et

$$M = \max_{i \in CR} M_i$$

Puisque M est positif, le sommet V n'est donc pas admissible pour chacune des contraintes restantes et il ne se situe donc pas dans la région S.

Coupons alors le cône par la contrainte la plus violée par le sommet V, c'est-à-dire par la contrainte correspondant à M.

Certains côtés du cône existant vont alors couper ce nouvel hyperplan, dont l'équation est donnée par la contrainte choisie, et de nouveaux sommets vont être engendrés.

Nous garderons uniquement les sommets intérieurs de cette nouvelle enveloppe et nous éliminerons les autres non intéressants.

Rappelons que les sommets intérieurs sont ceux qui satisfont chacune des nouvelles contraintes courantes.

Le sommet V devrait donc être éliminé lors de cette étape car il n'est pas admissible pour le nouvel ensemble de contraintes exemple.

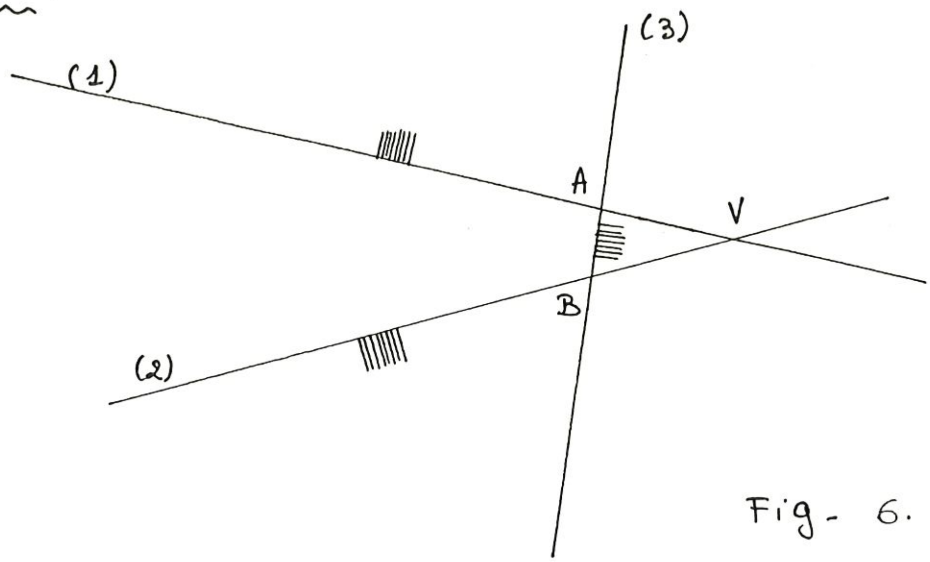


Fig. 6.

Sur cette figure 6, considérons le premier cône polyédral défini par les contraintes (1) et (2) et de sommet V. Ce sommet V n'est pas admissible pour la contrainte notée (3).

Cette contrainte, ajoutée aux contraintes courantes, recoupe la contrainte (1) au point B et (2) au point B.

A et B satisfont, ainsi, chacune des nouvelles contraintes (1), (2) et (3).

Le nouveau cône polyédral enveloppant la région admissible est donc formé des contraintes (1), (2) et (3) et les nouveaux sommets intérieurs en sont A et B.

Revenons au cas général. Une fois que les sommets intérieurs ont été déterminés, examinons s'ils sont des sommets de la région admissible ou non.

• Si au moins un des nouveaux sommets intérieurs satisfait toutes les nouvelles contraintes restantes, alors ce sommet du nouvel ensemble polyédral est aussi un sommet de la région admissible S.

• Si aucun des nouveaux sommets intérieurs n'est dans S, c'est-à-dire que chacun de ces sommets est non admissible pour au moins une des contraintes restantes ;
alors, calculons

$$M_i^j = A_i v^j - b_i \qquad \text{où } v^j \text{ est sommet intérieur } i \in CR.$$

$$M^j = \max_{i \in CR} M_i^j \qquad \text{pour chaque sommet intérieur.}$$

$$\text{et} \quad M = \max_{v^j \text{ sommet intérieur}} M^j$$

La contrainte correspondant à M est une des contraintes les plus violées par les sommets intérieurs de l'ensemble polyédral considéré.
Cette contrainte est alors ajoutée aux contraintes courantes CC.
Nous calculerons ensuite les nouveaux sommets intérieurs correspondant à ce nouvel ensemble de contraintes CC et nous reprendrons le même test que celui exposé précédemment ; c'est-à-dire que :
• s'il existe au moins un nouveau sommet intérieur

admissible pour S,

alors nous effectuerons l'étape suivante.

• sinon, nous chercherons à nouveau la contrainte la plus violée parmi les contraintes restantes et nous l'ajouterons aux contraintes courantes.

Remarquons que cette opération comporte un nombre fini d'étapes.

En effet, nous passons à l'étape suivante de la méthode, dès que nous possédons un sommet commun à la région admissible S et à l'ensemble polyédral enveloppant S.

Si ce n'est pas le cas, nous effectuons une recherche parmi les contraintes restantes qui sont en nombre fini.

Donc, le nombre d'opérations à effectuer, dans le cas où M est strictement positif, est fini.

Introduisons à présent, explicitement la notion de côtés libres.
La recherche d'un polyèdre convexe enveloppant la région admissible S est en effet basée sur cette notion définie en début de chapitre.
Rappelons qu'un côté libre est admissible pour chacune des contraintes courantes et possède un seul sommet intérieur comme point de terminaison.
Le polyèdre convexe enveloppant S sera dès lors obtenu quand il n'y a plus de côté libre. En effet, à ce moment, tous les côtés du polyèdre auront pour extrémités deux sommets intérieurs.

Mais supposons qu'en cours d'itération, nous disposions d'un ensemble polyédral enveloppant S et possédant encore des côtés libres. Cet ensemble formé par les contraintes courantes est donc non borné.
Essayons de le borner au moyen d'une ou de plusieurs contraintes restantes, afin de trouver le meilleur ensemble polyédral possible, qui enveloppe S.
Ainsi, nous allons choisir une contrainte restante qui sera la plus proche possible des sommets dont nous disposons à ce moment. Et, nous allons recouper l'ensemble polyédral par cette contrainte.

Supposons que nous avons :

- CC^k l'ensemble des contraintes courantes à l'itération k.
- V^k l'ensemble des sommets intérieurs.
- CR^k l'ensemble des contraintes restantes.

Définissons par :

- A^k l'ensemble des éléments de V^k se situant dans la région admissible S.

ou encore

$$A^k = \{ v^t \in V^k \,/\, v^t \in S \}$$

Les éléments de A^k vérifient donc toutes les contraintes restantes de CR^k mais ne sont pas tous à la même distance de chacune de ces contraintes.

Considérons v^t un élément de A^k et calculons :

$$M_i^t = A_i \, v^t - b_i \qquad \begin{cases} \text{pour chaque } v^t \in A^k \\ \text{pour chaque } i \in CR^k \end{cases}$$

$$\text{et} \qquad M^t = \max_{i \in CR^k} M_i^t \qquad \text{pour chaque } v^t \in A^k$$

Nous pouvons alors calculer :

$$M = \max_{v^t \in A^k} M^t .$$

La contrainte correspondant à la valeur de M trouvée ci-dessus, est alors ajoutée aux contraintes courantes.

supposons que cette nouvelle contrainte est notée (i) où $(i) \in CR^k$.

Le nouvel ensemble des contraintes courantes sera alors

$$CC^{k+1} = CC^k \cup \{i\}$$

et nous aurons $CR^{k+1} = CR^k \setminus \{i\}$

Nous évaluons alors les côtés libres du nouvel ensemble polyédral, par une méthode qui sera explicitée plus loin.

Notons :

- E^k l'ensemble des côtés libres à l'itération k.

Si $E^{k+1} = \phi$, alors nous nous arrêtons : nous avons alors trouvé un polyèdre convexe borné qui enveloppe la région admissible S.

Si $E^{k+1} \neq \phi$, nous poursuivrons la même démarche qui consiste donc à ajouter des nouvelles contraintes aux contraintes courantes et cela jusqu'au moment où l'ensemble des côtés libres devient vide.

Remarque

Si, à un certain moment, nous avons ajouté toutes les contraintes restantes et si l'ensemble des côtés libres est toujours non vide, cela signifie que l'ensemble polyédral enveloppant S est non borné et qu'on ne pourra donc pas le borner.

Nous possédons à présent tous les éléments nécessaires pour décrire l'algorithme de recherche d'un polyèdre convexe borné enveloppant la région admissible S du problème (P).

Dans cet algorithme, nous devrons effectuer différentes opérations telles que rechercher les contraintes redondantes, rechercher les côtés libres d'un ensemble polyédral, rechercher les nouveaux sommets intérieurs

Nous nous pencherons plus profondément sur ces problèmes, après avoir décrit l'algorithme et nous verrons comment les résoudre.

3.2. Algorithme.

ETAPE 0.

Numéroter les contraintes du problème

Définir CE^0 l'ensemble des contraintes courantes

V^0 l'ensemble des sommets intérieurs

E^0 l'ensemble des côtés libres.

CR^0 l'ensemble des contraintes restantes.

Résoudre le premier système linéaire de n équations à n inconnues $A_i\, x = b_i \quad i = 1, \dots n.$

Si la solution est unique, poser :

$CE^1 = \{1, \dots, n\}$

V^1 = le sommet obtenu.

$E^1 = \{$côtés libres du cône polyédral obtenu$\}$

$CR^1 = \{n+1, \dots, m\}$

et aller à l'étape 1.

Si la solution n'est pas unique,

aller à l'étape 5.

ETAPE 1.

CC^k, V^k, E^k et CR^k sont connus.

Remplacer tous les éléments de V^k dans les contraintes restantes CR^k

- S'il existe au moins une contrainte extra, aller à l'étape 2.
- Sinon si au moins un élément de V^k est aussi dans S aller à l'étape 3.

  sinon aller à l'étape 4.

ETAPE 2.

Soit (i) la contrainte extra que l'on ajoute aux contraintes courantes.

Poser $CC^{k+1} = CC^k \cup \{i\}$

$V^{k+1} = \{\text{sommets intérieurs}\}$

$CR^{k+1} = CR^k \setminus \{i\}$

Déterminer $E^{k+1} = \{\text{côtés libres de l'ensemble polyédral}\}$

- Si $E^{k+1} = \phi \rightarrow$ STOP
- Sinon remplacer les éléments de V^{k+1} dans les contraintes restantes et
  - S'il existe au moins une contrainte-extra aller à l'étape 2
  - Sinon
    - si au moins un élément de V^{k+1} est dans S aller à l'étape 3
    - Sinon, aller à l'étape 4.

ETAPE 3.

CC^k, V^k, E^k et CR^k sont connus

et nous disposons d'au moins un sommet de S.

Définir

$$A^k = \{ \text{éléments de } V^k \text{ qui sont aussi dans } S \}$$

Remplacer tous les éléments de A^k dans les contraintes restantes et calculer :

$$M_i^t = A_i v^t - b_i \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour chaque } v^t \in A^k \\ \text{pour chaque } i \in CR^k \end{array} \right.$$

$$M^t = \max_{i \in CR^k} M_i^t \qquad \text{pour chaque } v^t \in A^k$$

$$\text{et} \quad M = \max_{v^t \in A^k} M^t$$

Soit (i) la contrainte correspondant à M,

poser

$$CC^{k+1} = CC^k \cup \{i\}$$

$$V^{k+1} = \{ \text{sommets intérieurs} \}$$

$$CR^{k+1} = CR^k \setminus \{i\}$$

Déterminer $E^{k+1} = \{ \text{côtés libres} \}$

- Si $E^{k+1} = \phi \rightarrow$ STOP.
- sinon
  - s'il existe des contraintes-extra, aller à l'étape 2.
  - sinon aller à l'étape 3.

ETAPE 4.

cc^k, V^k, E^k et cR^k sont connus.

Aucun sommet de S n'est connu.

Remplacer tous les éléments de V^k dans les contraintes restantes et calculer

$$M_i^j = A_i v^j - b_i \quad \begin{cases} \text{pour chaque } v^j \in V^k \\ \text{pour chaque } i \in cR^k \end{cases}$$

$$M^j = \max_{i \in cR^k} M_i^j \quad \text{pour chaque } v^j \in V^k$$

$$\text{et } M = \max_{v^j \in V^k} M^j$$

Soit (i) la contrainte correspondant à M.

Poser $cc^{k+1} = cc^k \cup \{i\}$

$cR^{k+1} = cR^k \setminus \{i\}$

Déterminer $V^{k+1} = \{\text{sommets intérieurs}\}$

$E^{k+1} = \{\text{côtés libres}\}$

- Si $E^{k+1} = \phi \rightarrow$ STOP
- Sinon substituer les éléments de V^{k+1} dans les contraintes restantes et
  - s'il existe une contrainte extra aller à l'étape 2.
  - sinon
    - si un des éléments de V^{k+1} est dans S aller à l'étape 3
    - sinon, aller à l'étape 4.

ETAPE 5

Introduire la contrainte suivante dans cc^k et poser $cc^{k+1} = cc^k \cup \{$ nouvelle contrainte $\}$
et résoudre tous les systèmes linéaires $n \times n$ obtenus avec les éléments de cc^{k+1}

- Si un de ces systèmes linéaires admet une solution unique, poser

  $V^{k+1} = \{$ le sommet obtenu $\}$

  $cc^{k+1} = \{$ contraintes définissant le sommet $\}$

  et aller à l'étape 1.

- Si aucun des systèmes linéaires n'admet de solution unique,

  aller à l'étape 5.

Observations.

Les différentes étapes de cet algorithme de recherche d'un polyèdre convexe enveloppant la région admissible S, correspondent bien à la démarche que nous avons effectuée précédemment.

Toutes les situations que nous avons envisagées sont bien reprises dans l'algorithme.

En effet, l'étape 0 de l'algorithme correspond à la résolution d'un système de n équations à n inconnues, qui doit nous donner un premier sommet V.

Si ce n'est pas le cas, l'étape 5 complète cette étape 0 et nous permet de choisir d'autres contraintes du problème (P) et de résoudre le nouveau système correspondant par la méthode de décomposition L.U.

L'étape 1 correspond, elle, à la phase suivante de notre recherche où nous essayons de voir si le sommet V se situe dans S ou non. Pour cela, nous remplaçons le sommet V dans chacune des contraintes restantes.

S'il existe au moins une contrainte extra, c'est-à-dire si l'ensemble D(V), défini précédemment, est non vide, nous effectuerons alors la second étape de l'algorithme.

Les étapes 3 et 4 de cet algorithme correspondent au cas où l'ensemble D(V) est vide et l'étape 3 reprend plus particulièrement le cas où $M < 0$, tandis que l'étape 4 reprend le cas où $M > 0$, c'est-à-dire le cas où l'on ne dispose pas encore de sommet de la région admissible S.

3.3. Méthodes pratiques pour l'application de l'algorithme.

A. Suppression des contraintes redondantes.

Nous avons vu que parmi les contraintes du problème (L), pouvaient se trouver des contraintes dites "redondantes" par rapport à d'autres.
Nous allons donc supprimer ces contraintes redondantes car elles ne nous apportent pas de renseignements utiles.
Pour les détecter, nous allons comparer les différentes contraintes du problème (L) entre elles.

Supposons que l'on compare la contrainte (i) et la contrainte (i'), c'est-à-dire que l'on considère les lignes (i) et (i') de la matrice A des contraintes.
Si tous les éléments correspondants dans les lignes (i) et (i') possèdent un même rapport de grandeur, alors une des contraintes est redondante par rapport à l'autre.
Mais, examinons, plus en détail, les différentes situations qui peuvent se produire.
Considérons le premier coefficient non nul de la $i^{ème}$ ligne de A, soit $A(i,j)$ et calculons le rapport suivant, noté R:

$$R = \frac{A(ii,j)}{A(i,j)} \qquad A(i,j) \neq 0.$$

Nous allons ensuite tester si

$$A(i,jj) * R \neq A(ii,jj) \qquad \forall\, jj = 1, \ldots m.$$

- S'il existe au moins un indice jj pour lequel le test est vrai, cela signifie que les contraintes (i) et (ii) sont non redondantes.

  Nous pourrons alors passer à la comparaison des contraintes (i) et (ii+1). Le test de comparaison se poursuit donc.

- Si le test est faux pour chacun des indices jj variant de 1 à m, cela signifie que les contraintes sont liées entre elles et trois cas peuvent se présenter.

<u>1er cas</u> $\boxed{R > 0}$

Pour déterminer quelle est la contrainte redondante, nous allons examiner les seconds membres des contraintes, c'est-à-dire B(i) et B(ii).

Nous pouvons avoir 2 situations possibles,

ou bien $R * B(i) - B(ii) \leq 0$

ou bien $R * B(i) - B(ii) > 0.$

1°/ $\underline{R * B(i) - B(ii) \leq 0}$.

Montrons d'abord ce qu'il se passe sur un exemple et considérons les contraintes suivantes :

$$2 x_1 + 3 x_2 \leq 1 \qquad (i)$$

$$4 x_1 + 6 x_2 \leq 4 \qquad (ii)$$

calculons $R = \frac{4}{2} = 2 > 0$

et nous sommes bien dans le cas où $R * B(i) - B(ii) \leq 0$

car nous avons $B(i) = 1$ et $B(ii) = 4$. et donc

$$2 * 1 - 4 = -2 < 0.$$

Graphiquement nous avons la situation suivante :

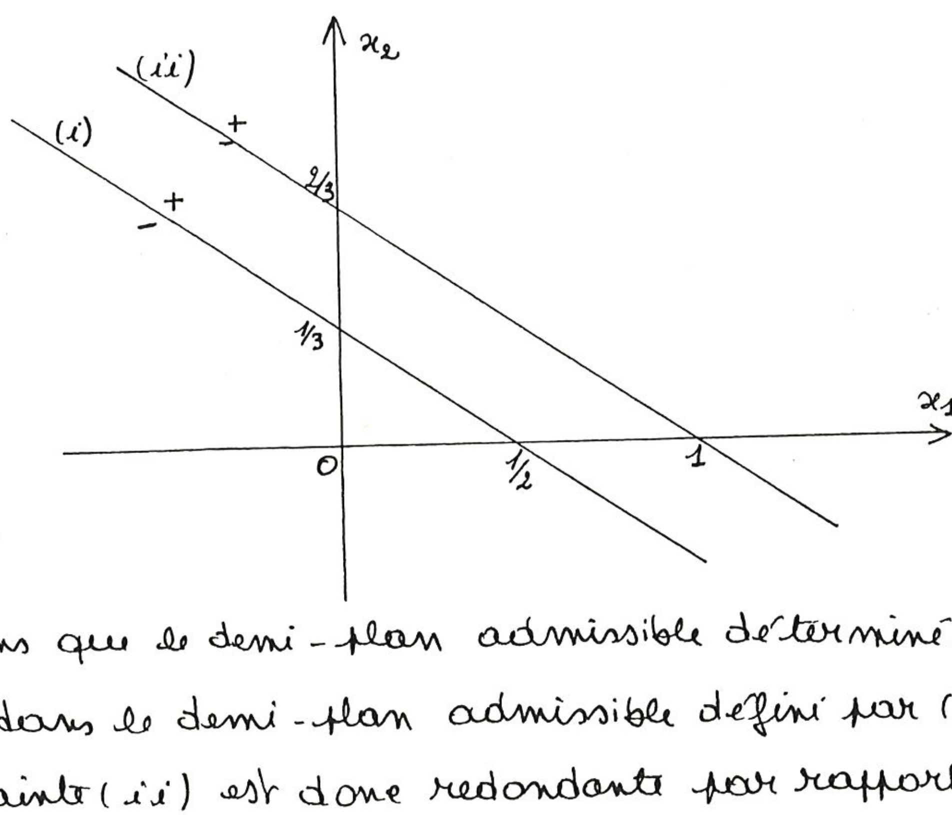


Fig - 7.

Remarquons que le demi-plan admissible déterminé par (i) est inclus dans le demi-plan admissible défini par (ii). La contrainte (ii) est donc redondante par rapport à (i) et elle pourra être éliminée. Nous garderons donc simplement la contrainte (i).

De manière générale, multiplions la contrainte (i) par le rapport R, nous avons alors :

$$R\, A(i,1)\, x_1 + R\, A(i,2)\, x_2 + \dots + R\, A(i,n)\, x_n \leq R\, B(i) \quad (i)'$$

et

$$A(ii,1)\, x_1 + A(ii,2)\, x_2 + \dots + A(ii,n)\, x_n \leq B(ii) \quad (ii)$$

or $R\, A(i, jj) = A(ii, jj) \quad \forall\, jj = 1, \dots, n.$

donc les contraintes $(i)'$ et (ii) peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$A(ii,1)\, x_1 + A(ii,2)\, x_2 + \dots + A(ii,n)\, x_n \leq R\, B(i) \quad (i)'$$
$$A(ii,1)\, x_1 + A(ii,2)\, x_2 + \dots + A(ii,n)\, x_n \leq B(ii) \quad (ii)$$

De plus, nous avons $R * B(i) \leq B(ii)$ par hypothèse, ce qui signifie donc que la contrainte (i) se situe toujours plus à gauche de la contrainte (ii) et le demi espace admissible déterminé par (i) est inclus dans le demi-espace admissible défini par (ii).

La contrainte (ii) est donc redondante par rapport à la contrainte (i).

Nous garderons donc la contrainte (i) et la contrainte (ii) sera supprimée des contraintes du problème $(\mathcal{P})$.

Nous poursuivrons alors le test de comparaison avec les autres contraintes de $(\mathcal{P})$.

2°/ $R \times B(i) - B(ii) > 0$

Nous avons donc ici l'opposé de la situation précédente et la contrainte (i) sera dans ce cas redondante par rapport à la contrainte (ii). Nous garderons dès lors la contrainte (ii) et nous éliminerons la contrainte (i), ou plus exactement nous la remplacerons par la dernière contrainte du problème (P). Nous poursuivrons alors le test en comparant la nouvelle contrainte (i) et (ii).

2ème cas $\boxed{R = 0}$

Nous sommes donc dans le cas où le test nous donne

$$A(i, jj) * R = A(ii, jj) \qquad \forall jj = 1, \ldots, m.$$

Puisque le rapport R est nul, cela signifie que les coefficients de la ligne (ii) dans la matrice A, sont tous nuls.
Dans ce cas, nous nous arrêterons.

3ᵉ cas $\boxed{R < 0}$

Dans ce cas, nous savons que les deux contraintes (i) et (ii) sont liées entre elles, mais nous ne pouvons rien conclure.

Nous ne pouvons pas dire qu'une contrainte est redondante par rapport à l'autre.

Voyons ce qui se passe pour un exemple en dimension 2.

exemple 1.

Considérons les contraintes suivantes :

$$4x_1 - 6x_2 = 3 \qquad (i)$$

$$-4x_1 + 6x_2 = 3. \qquad (ii)$$

Calculons le rapport R, nous avons alors:

$$R = \frac{-4}{4} = -1 < 0.$$

Graphiquement, nous avons la situation suivante:

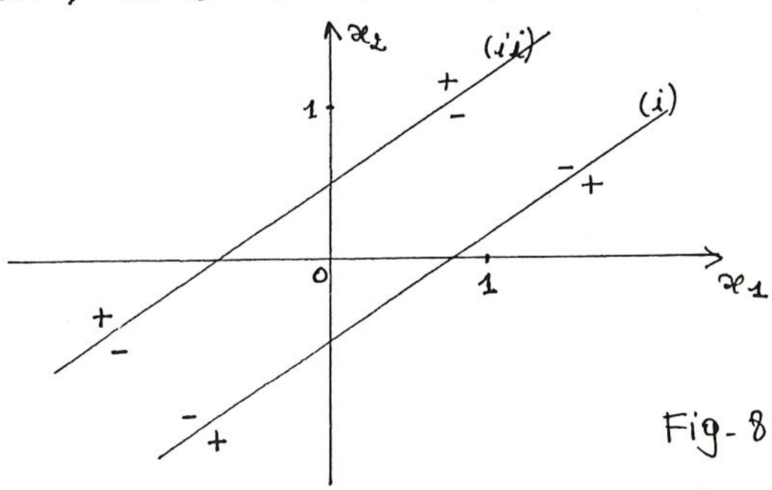


Fig-8

Remarquons que la partie admissible se situe entre les deux droites (i) et (ii), il n'y a donc pas de contrainte redondante.

exemple 2.

considérons les contraintes suivantes :

$$4\,x_1 - 6\,x_2 = 0 \qquad (i)$$

$$-4\,x_1 + 6\,x_2 = -4 \qquad (ii)$$

Le rapport vaut dans ce cas : R =

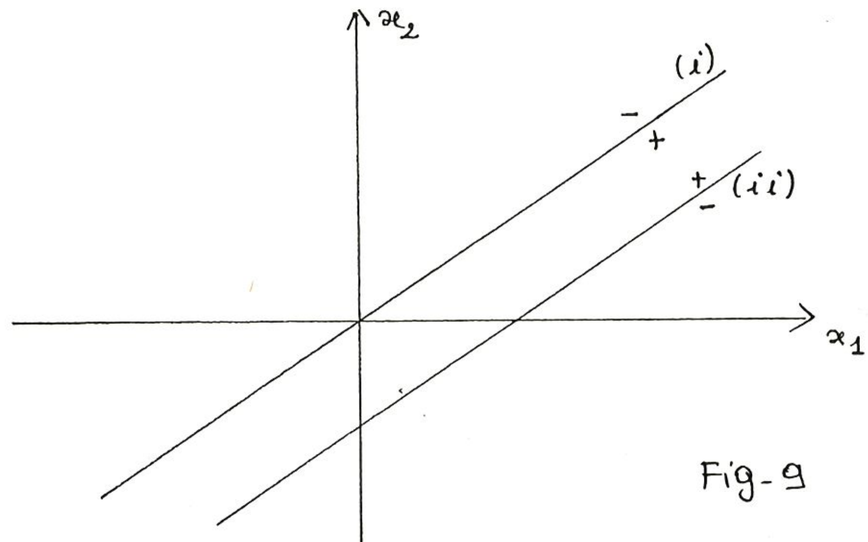


Fig-9

La partie admissible se situe, ici, à l'extérieur des droites (i) et (ii), il n'y a donc pas de contraintes redondantes.

Pour détecter les contraintes redondantes de (P), nous effectuerons ces tests de comparaison jusqu'au moment où toutes les contraintes auront été examinées.

Nous compterons alors le nombre de contraintes non redondantes du problème et s'il en reste moins que la dimension n de l'espace de travail, nous arrêterons la recherche, car le tronçon des contraintes sera non borné.

Sinon, nous commencerons à rechercher un polyèdre convexe enveloppant la région admissible S du problème (P).

B. Détermination des côtés libres d'un ensemble polyédral convexe.

1°/ Sommet non-dégénéré.

Dans un espace de dimension n, nous savons que n côtés émanent d'un sommet V non dégénéré.
Certains de ces côtés sont sont libres alors que d'autres sont limités par deux sommets intérieurs de l'ensemble polyédral considéré.
Dans $\mathbb{R}^n$, chaque côté est défini par les équations de $(n-1)$ hyperplans ; en effet une droite de l'espace de dimension n est l'intersection de $(n-1)$ hyperplans.

Dès lors, si nous connaissons les contraintes qui définissent le sommet V considéré, il est possible de déterminer l'ensemble des n côtés émanant de V.
Chaque contrainte représente l'équation d'un hyperplan.
Si nous prenons $(n-1)$ hyperplans, c'est-à-dire $(n-1)$ contraintes parmi les n contraintes passant par V, nous déterminons alors un côté émanant du sommet V.
Pour trouver tous les côtés émanant de V, il suffit donc de former toutes les combinaisons possibles de $(n-1)$ contraintes choisies parmi les n passant par V.

Si nous désignons les contraintes passant par le sommet V, par un nombre, nous noterons alors le côté formé par $(n-1)$ de ces contraintes par un nombre du type $(1\ 2\ \ldots\ n-1)$.

exemple

Travaillons dans $\mathbb{R}^3$ et considérons l'ensemble des contraintes $ec = \{1, 2, 3\}$.

Les éléments de ec définissent un sommet V noté (123).

Si nous prenons toutes les combinaisons possibles de 2 contraintes parmi les 3 définissant V, nous obtenons les combinaisons suivantes : 12 13 et 23.

L'ensemble des côtés émanant de V est donc :

$E(123) = \{12, 13, 23\}$

Quand un côté est noté (12), cela signifie que ce côté est défini par les contraintes (1) et (2).

Cette ligne est composée de deux demi-droites ayant un point commun : le sommet V. Mais seule une de ces demi-droites constitue un côté libre du cône de sommet V.

Dès lors, quand nous écrivons (12), nous considérons la demi-droite admissible du cône de sommet V, demi-droite déterminée par (1) et (2).

Dans un ensemble polyédral convexe, tous les côtés émanant d'un sommet intérieur non-dégénéré sont admissibles pour les contraintes définissant cet ensemble polyédral convexe.

Dès lors, pour déterminer l'ensemble des côtés admissibles émanant d'un sommet intérieur, il suffit donc de déterminer tous les côtés émanant de ce sommet : nous aurons ainsi l'ensemble des côtés libres correspondant au sommet V.

2°/ Sommet dégénéré.

Quand le sommet V est dégénéré, tous les côtés qui en émanent ne sont pas tous nécessairement admissibles pour l'ensemble polyédral considéré : il faudra donc déterminer quels sont les côtés admissibles pour les contraintes définissant le sommet intérieur V.

Nous procéderons en deux étapes. Il s'agira de :

1°/ trouver tous les côtés passant par le sommet dégénéré V.

2°/ déterminer si ce côté est admissible pour les contraintes définissant V.

Supposons que nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ et que m contraintes passent par le sommet V, où $m > n$.
Le sommet V est donc bien un sommet dégénéré.
Supposons que la région admissible définie par ces contraintes est un cône polyédral de sommet V.
Pour trouver les rayons extrêmes de ce cône, nous devons d'abord déterminer toutes les lignes passant par V.
Nous en avons en fait $\binom{m}{n-1}$ lignes passant par V, c'est-à-dire qu'il y en a exactement $\dfrac{m!}{(n-1)!\,(m-n+1)!}$
En effet, nous savons qu'une droite passant par $V \in \mathbb{R}^n$, est déterminée par les équations de $(n-1)$ hyperplans et pour trouver toutes ces droites il faut prendre toutes les combinaisons possibles de $(n-1)$ contraintes parmi les m passant par V.

Quand nous avons déterminé toutes ces lignes, il reste à voir quelles sont les demi-droites passant par V qui sont des rayons extrêmes du cône polyédral.
Supposons que l'on ait choisi $(n-1)$ contraintes passant par V et qu'elles définissent le côté E1, $(m-n+1)$ autres contraintes passent encore par le sommet V.
Si une des demi-droites de E1 est admissible pour ces $(m-n+1)$ contraintes restantes, alors E1 est un rayon extrême du cône polyédral de sommet V.

Pour cela, choisissons un point P sur la droite E1. On trouve le point P en coupant E1 par un hyperplan parallèle à une des contraintes restantes.
Quand P est connu, regardons alors s'il satisfait toutes les contraintes restantes passant par V.
Si c'est le cas, une des demi-droite de E1 est un rayon extrême du cône polyédral.
Sinon, cherchons le point Q qui est le symétrique de P par rapport à V sur la droite E1.

Si Q satisfait chacune des contraintes passant par V, la seconde demi-droite de E1 est un rayon extrême du cône.
Sinon, aucune des demi-droites de E1 n'est rayon extrême du cône polyédral de sommet V.

Nous effectuerons la même recherche pour chacune des droites passant par le sommet dégénéré V.

exemple.

Voyons ce qui se passe pour un sommet dégénéré V dans l'espace de dimension 3, $\mathbb{R}^3$.

Considérons les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} -x_1 & & & \leq 0 & (1) \\ & -x_2 & & \leq 0 & (2) \\ & & -x_3 & \leq 0 & (3) \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & \leq 0 & (4) \end{cases}$$

les contraintes définissent un cône de sommet V où $V = (1234)$ a pour composantes $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Les droites émanant de V sont au nombre de six et sont notées (12), (13), (14), (23), (24), (34).

Examinons si une des demi-droites de (12) est un rayon extrême du cône polyédral.

Les contraintes restantes passant par V sont dans ce cas, les contraintes (3) et (4).

Considérons un hyperplan parallèle à celui d'équation (3), par exemple $-x_3 < 1$

Le point P est alors $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

et ce point ne satisfait pas les contraintes (3) et (4).

Mais, son symétrique $Q \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = +1 \end{cases}$ satisfait (3) et (4).

Donc une des deux demi-droites de (12) est un rayon extrême du cône polyédral de sommet V, nous dirons alors que (12) est un côté libre du cône.

Si nous continuons la même démarche pour les cinq autres droites passant par V, nous obtenons en fait quatre côtés libres :

$$E(1234) = \{12, 13, 14, 34\}$$

Revenons au problème général. Jusqu'à présent, nous avons vu comment déterminer les côtés libres correspondant à un cône polyédral de sommet V dégénéré ou non. Mais, ce qui nous intéresse principalement, c'est de pouvoir déterminer tous les côtés libres d'un ensemble polyédral convexe.

Pour cela, nous déterminerons les côtés admissibles émanant de chacun des sommets intérieurs de cet ensemble polyédral convexe et nous comparerons ces ensembles en éliminant les côtés communs.

En effet, si un côté admissible se situe dans deux ensembles différents, cela signifie que ce côté possède deux sommets intérieurs pour extrémités : ce n'est donc pas un côté libre.

Quand tous les éléments communs aux différents ensembles sont éliminés, il reste alors uniquement les côtés libres de l'ensemble polyédral convexe.

Quand les sommets de l'ensemble polyédral convexe sont tous non-dégénérés, il est donc très facile de déterminer les côtés libres de cet ensemble.

Mais, quand certains sommets intérieurs sont dégénérés, les calculs sont alors un peu plus longs puisqu'il faut déterminer si un côté émanant de ce sommet dégénéré est admissible ou non pour le cône polyédral correspondant.

<u>exemple</u>

Reprenons l'exemple précédant et ajoutons une cinquième contrainte :

$$x_2 - x_3 \leq 2 \qquad (5).$$

L'ensemble des sommets intérieurs correspondant à ces cinq contraintes est :

$$V = \{(1234), (135), (345)\}$$

Déterminons l'ensemble des côtés admissibles pour chacun des sommets intérieurs ; nous avons alors :

$$E(1234) = \{12, 13, 14, 34\}$$

$$E(135) = \{13, 15, 35\}$$

$$E(345) = \{34, 35, 45\}$$

Quand nous comparons ces ensembles, nous remarquons que (13) se situe dans $E(1234)$ et dans $E(135)$, cela signifie que le côté (13) est limité par les sommets intérieurs (1234) et (135), il n'est donc pas un côté libre et nous allons l'éliminer.

De même, on élimine (34) et (35)

Les côtés libres sont donc

$$E = \{12, 14, 15, 45\}.$$

C. Détermination des éléments de V^{k+1}.

A la $k^{ième}$ itération, nous connaissons

cc^k = ensemble des contraintes courantes

V^k = ensemble des sommets intérieurs

E^k = ensemble des côtés libres.

Nous ajoutons la contrainte (i) à l'ensemble cc^k, nous avons donc $cc^{k+1} = cc^k \cup \{i\}$ et nous voulons déterminer les éléments de V^{k+1} qui sont les sommets intérieurs correspondant à cc^{k+1}.

Notons S^k l'ensemble polyédral convexe formé à la $k^{ième}$ itération.

Deux cas peuvent se présenter dans cette recherche.

<u>1er cas : Les éléments de V^k ne satisfont pas la contrainte (i).</u>

Dans ce cas, la contrainte (i) recoupe tous les côtés libres de l'ensemble polyédral convexe S^k et nous obtenons un nouvel ensemble polyédral convexe S^{k+1} enveloppant la région admissible S.

Pour trouver les éléments de V^{k+1}, qui sont les sommets de S^{k+1}, il suffit donc de prendre les points de rencontre de (i) avec les éléments de E^k, côtés libres de S^k; donc

$$V^{k+1} = \{ \text{intersections de (i) avec les éléments de } E^k \}.$$

<u>2e cas : certains sommets de V^k satisfont la contrainte (i).</u>

Les sommets de S^k qui satisfont la contrainte (i), sont donc aussi dans le nouvel ensemble polyédral convexe S^{k+1}, et sont des éléments de V^{k+1}.

La contrainte (i) coupe certains côtés de S^k : ce sont les côtés libres de l'ensemble polyédral convexe formé soit par les contraintes définissant les éléments de V^k admissibles pour (i), soit par les contraintes définissant les éléments de V^k qui ne satisfont pas (i).

Nous devrons donc examiner quel ensemble polyédral convexe nous allons utiliser.

Voyons sur quelques exemples, les différentes situations qui peuvent se présenter.

exemple 1

Soit $\mathcal{C}^k = \{1, 2, 3\}$ $\quad V^k = \{A, B\}$ et $E^k = \{A1, B2\}$

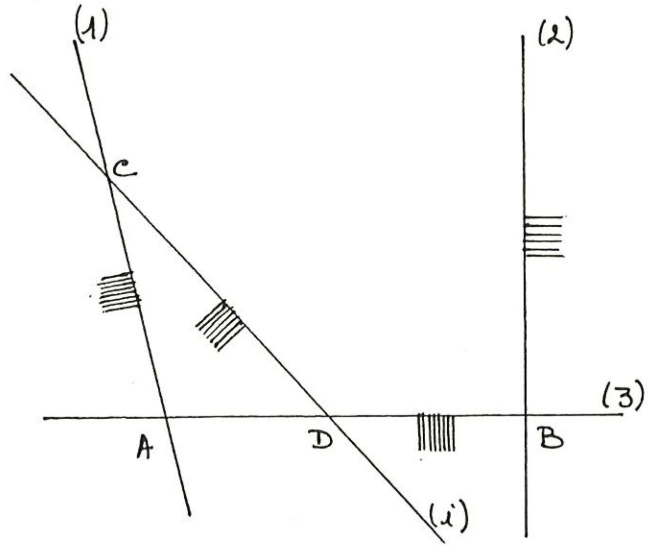


Fig - 10

Si nous recoupons le côté libre A1 par la contrainte (i), nous trouvons le point C qui satisfait les contraintes de $\mathcal{C}^k$.

L'extrémité de ce côté libre est le sommet A qui ne satisfait pas (i). Dans ce cas, nous considérerons l'ensemble polyédral convexe formé par les contraintes définissant A, c'est-à-dire par (1) et (3). Les côtés libres de cet ensemble coupent (i) en deux points C et D qui sont deux nouveaux sommets de S^{k+1}.

Le sommet B satisfait, lui, la contrainte (i) et se trouve donc dans V^{k+1}.

$$V^{k+1} = \{B, C, D\}.$$

$$\text{et } \mathcal{C}^{k+1} = \{1, 2, 3, i\}.$$

exemple n°2.

considérons $\mathcal{C}^k = \{1, 2, 3\}$

$V^k = \{A, B\}$

$E^k = \{A1, B2\}$.

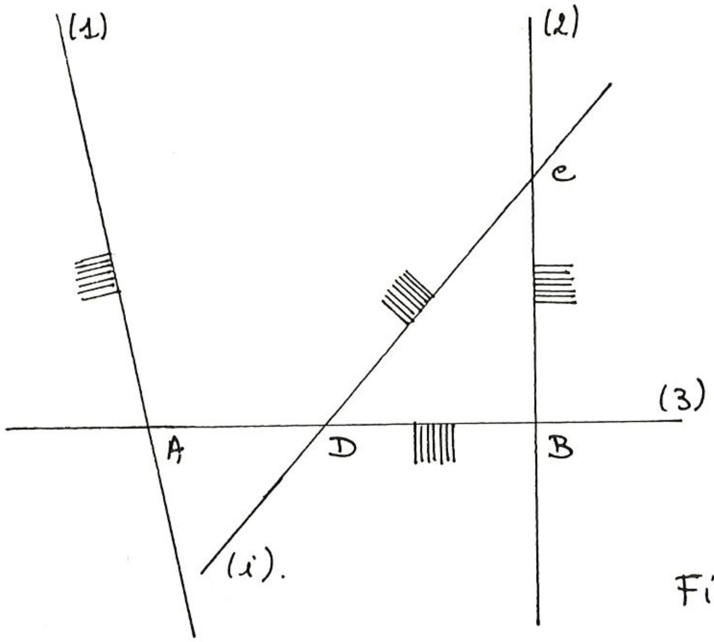


Fig - 11

Le sommet B satisfait la contrainte (i). et se trouve donc dans l'ensemble V^{k+1}.

La contrainte (i) recoupe le côté libre A1 en un point qui ne satisfait pas la contrainte (3) et le point de terminaison du côté A1 est le sommet A non admissible pour (i).

Dès lors, nous considérerons l'ensemble polyédral convexe formé par les contraintes (2) et (3) définissant le sommet B admissible pour (i).

Quand nous recoupons les côtés libres de cet ensemble par la contrainte (i), nous trouvons les sommets C et D.

D'où $V^{k+1} = \{B, C, D\}$.

En résumé, pour trouver les éléments de V^{k+1}, c'est-à-dire les sommets intérieurs de l'ensemble polyédral convexe S^{k+1}, nous devons procéder en quatre étapes :

a/ Poser V_a = { éléments de V^k admissibles pour (i) }

b/ Poser V'_a = { éléments de V^k non admissibles pour (i) }
couper un rayon extrême de S^k par (i) et trouver son extrémité parmi les sommets de S^k.
Si ce point de terminaison satisfait (i),
poser E_b = { rayons extrêmes de l'ensemble polyédral construit à partir des contraintes définissant les éléments de V_a }.
sinon, poser E_b = { rayons extrêmes de l'ensemble polyédral défini par les contraintes déterminant les éléments de V'_a }.

c/ Poser V_c = { intersections des éléments de E_b avec (i) }

d/ $V^{k+1} = V_a \cup V_c$.

4. Recherche de la solution optimale

A ce stade de la recherche, nous disposons déjà d'un polyèdre convexe borné enveloppant la région admissible S. Nous connaissons donc l'ensemble des contraintes courantes noté CC^1, l'ensemble des sommets intérieurs V^1 et l'ensemble des contraintes restantes CR^1.

Cherchons le sommet qui minimise la fonction objectif $f(x)$ sur le polyèdre dont nous disposons.

Pour cela, calculons la valeur de la fonction $f(x)$ en chacun des éléments de V^1 et soit V le sommet qui minimise $f(x)$ sur ce polyèdre convexe borné.

Si V satisfait les contraintes restantes de CR^1, alors V se trouve dans la région admissible S et est la solution optimale du problème (P).

Sinon, nous pourrons trouver un meilleur polyèdre convexe borné enveloppant S en recoupant le polyèdre existant par une des contraintes restantes.

Nous effectuerons alors la recherche sur ce nouveau polyèdre enveloppant S.

4.1. Algorithme.

ETAPE 0.

Soient V^1 = { ensemble des sommets intérieurs du polyèdre

cc^1 = { contraintes courantes }

CR^1 = { contraintes restantes }.

chercher la valeur de la fonction objectif $f(x)$ pour chacun des éléments de V^1.

Trouver le sommet V qui minimise $f(x)$ et aller à l'étape 1.

ETAPE 1.

V^k, cc^k et CR^k sont connus.

Remplacer le sommet V dans les contraintes restantes de CR^k

- S'il satisfait toutes ces contraintes restantes, c'est la solution optimale du problème

  STOP.

- Sinon, calculer

$$M_i = A_i V - b_i \quad , i \in CR^k$$

et

$$M = \max_{i \in CR^k} M_i .$$

Soit (i) la contrainte correspondant à M,

Poser $cc^{k+1} = cc^k \cup \{i\}$

Trouver V^{k+1} = {sommets intérieurs correspondant à CC^{k+1}}

Trouver le sommet minimisant $f(x)$ parmi éléments de V^{k+1}

- Si il satisfait les contraintes de CR^{k+1} alors c'est la solution optimale STOP
- Sinon, aller à l'étape 1.

4.2. Remarques pratiques.

Détermination des éléments de V^{k+1}.

Nous connaissons ee^k, V^k, CR^k et la contrainte (i).

Posons $ee^{k+1} = ee^k \cup \{i\}$; nous désirons alors trouver les sommets du nouveau polyèdre enveloppant S.

Les éléments de V^k qui satisfont la contrainte (i) sont donc dans V^{k+1}.

Et nous trouvons les autres éléments de V^{k+1} en coupant tous les côtés libres de l'ensemble polyédral formé par les contraintes définissant les sommets de V^k satisfaisant (i).

Remarque.

Nous pourrions également considérer l'ensemble polyédral formé par les contraintes définissant les sommets de V^k qui ne satisfont pas (i).

En effet, quand nous coupons les côtés libres de cet ensemble par la contrainte (i), nous obtenons les mêmes éléments de V^{k+1} que dans le cas exposé précédemment.

Cela vient du fait, qu'à ce stade, l'ensemble polyédral considéré est borné.

exemple.

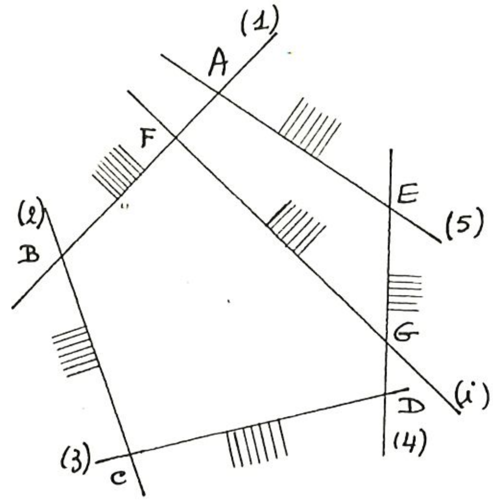


Fig - 12.

L'ensemble polyédral S^k possède 5 sommets, à savoir A, B, C, D et E et est formé par 5 contraintes.

Recoupons le polyèdre par la contrainte (i) et cherchons les sommets V^{k+1}.

Les sommets B, C et D satisfont (i) et sont donc des éléments de V^{k+1}.

Ces sommets sont définis par les contraintes (1), (2), (3) et (4).

Considérons l'ensemble polyédral formé par ces contraintes, les côtés libres en sont B1 et D4.

Quand nous coupons ces côtés libres par (i), nous trouvons les nouveaux sommets F et G qui seront également dans V^{k+1}.

Si nous considérons cette fois, les sommets qui ne satisfont pas (i), c'est-à-dire A et E, quand nous coupons les côtés libres de l'ensemble polyédral formé des contraintes (1), (4) et (5), par (i), nous obtenons également les sommets F et G et nous avons $V^{k+1} = \{B, C, D, F, G\}$.

En résumé, quatre étapes sont nécessaires pour trouver les sommets du polyèdre S^{k+1}, c'est-à-dire les éléments de V^{k+1}.

a/ Poser V_a = {éléments de V^k satisfaisant (i)}

b/ Poser E_b = {côtés libres de l'ensemble polyédral convexe formé par les contraintes définissant les éléments de V_a}

c/ Poser V_c = {intersections des éléments de E_b avec (i)}

d/ Poser $V^{k+1} = V_a \cup V_c$.

5. Exemple

Considérons le problème suivant :

$$\text{Minimiser } f(x) = \begin{cases} x_1 - 6x_2 + 54 & \text{si } x \leq 15 \\ -3x_1 - 6x_2 + 114 & \text{si } x \geq 15 \end{cases}$$

$$\text{sc} \begin{bmatrix} -x_1 & \leq 0 & (1) \\ -x_2 & \leq 0 & (2) \\ x_1 - 4x_2 & \leq 0 & (3) \\ -10x_1 + 7x_2 & \leq 0 & (4) \\ -2x_1 + 11x_2 & \leq 96 & (5) \\ 7x_1 + 2x_2 & \leq 150 & (6). \end{bmatrix}$$

ITERATION n°1.

Etape 0 :

$CC^0 = \phi$; $V^0 = \phi$; $E^0 = \phi$

$CR^0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Résolvons le système linéaire correspondant aux 2 premières contraintes ; on obtient une seule solution ($x_1 = 0$; $x_2 = 0$).

D'où : $CC^1 = \{1, 2\}$ $\quad V^1 = \{12\}$ $\quad E^1 = \{1, 2\}$

$CR^1 = \{3, 4, 5, 6\}$

Etape 1.

On remplace le sommet (12) dans les contraintes restantes et calculons $M_3 = 0$ $\quad M_4 = 0$

$M_5 = -96$ $\quad M_6 = -150$.

La contrainte (3) est donc une contrainte extra, on va alors à l'étape 2.

Etape 2: $ec^2 = ec^1 \cup \{3\} = \{1, 2, 3\}$

$V^2 = \{123\}$

$CR^2 = \{4, 5, 6\}$

Pour déterminer les côtés libres du cône polyédral de sommet (123), on détermine d'abord les droites passant par (123), et nous avons (1), (2), (3).

or aucune des demi-droites de (2) n'est admissible pour ce cône polyédral, mais (1) et (3) sont des rayons extrêmes.

$\Rightarrow E^2 = \{1, 3\}$.

Effectuons alors une remise à jour de l'ensemble des contraintes courantes car (2) ne passe plus par aucun des sommets disponibles $\Rightarrow ec^2 = \{1, 3\}$.

calculons $M_4 = 0$ $M_5 = -96$ $M_6 = -150$.

(4) est donc une contrainte - extra par rapport au cône.

ITERATION no 2.

Etape 2. on a $ec^3 = ec^2 \cup \{4\} = \{1, 3, 4\}$

$V^3 = \{134\}$

$cR^3 = \{5, 6\}$

$E^3 = \{3, 4\}$ car (1) ne possède aucune demi-droite admissible pour le cône de sommet (134).

La mise à jour de ec nous donne alors $ec^3 = \{3, 4\}$.

Calculons $M_5 = -96$ $M_6 = -150$.

et $M = \max M_i = -96. < 0.$

donc le sommet (34) est un sommet de la région admissible S, on va alors à l'étape 3.

Et, nous avons la contrainte (5) qui correspond à la valeur de M.

ITERATION n°3.

Etape 3. $ec^4 = ec^3 \cup \{5\} = \{3, 4, 5\}$

$V^4 = \{35, 45, 34\}$

$CR^4 = \{6\}$

Pour trouver les sommets du nouvel ensemble polyédral, on recoupe les côtés libres de E^3 par la nouvelle contrainte courante et en résolvant les systèmes correspondants, on obtient

$(35) \equiv (x_1 = 128 \;;\; x_2 = 32)$

$(45) \equiv (x_1 = 7 \;;\; x_2 = 10)$

Le sommet (34) étant dans S, il est aussi dans le nouvel ensemble polyédral.

Calculons les côtés libres : $E(34) = \{3, 4\}$

$E(35) = \{3, 5\}$

$E(45) = \{4, 5\}$

Quand on compare ces ensembles et élimine les côtés communs on obtient $E^4 = \phi \rightarrow$ STOP ; on a trouvé un premier polyèdre enveloppant le domaine admissible.

On cherche alors la solution optimale de (P).

ITERATION n° 1.

Etape 0. Nous avons : $f(34) = 54.$

$f(35) = -462.$

$f(45) = 1.$

La valeur minimum de $f(x)$ est atteinte en (35) mais (35) ne satisfait les contraintes restantes et n'est donc pas dans S.

Recoupons le polyèdre par la contrainte (6) et nous obtenons :

Etape 1. $\mathcal{C}^1 = \{3,4,5,6\}$

$\mathcal{C}R^1 = \phi$

$V^1 = \{34, 36, 56\}$

où $(36) \equiv (x_1 = 20 \; ; x_2 = 5)$ $\qquad f(36) = 24.$

$(56) \equiv (x_1 = 18 \; ; x_2 = 12)$ $\qquad f(56) = -12$

ITERATION n° 2.

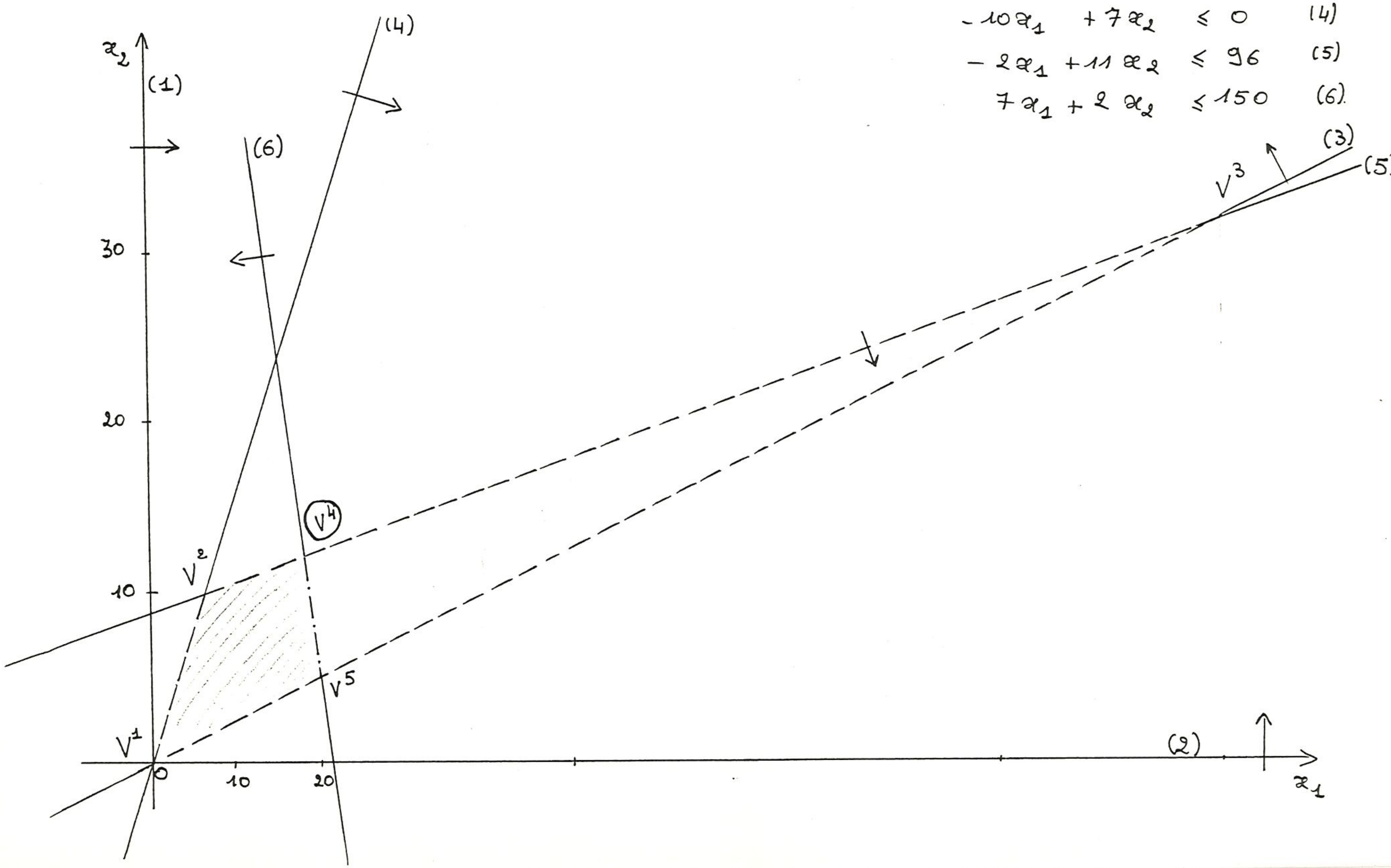
Le sommet pour laquelle la valeur de la fonction objective est minimum est le sommet (56) qui est un sommet de S. Donc la SOLUTION OPTIMALE du problème est le sommet

$$v^* \equiv \begin{cases} x_1 = 18 \\ x_2 = 12 \end{cases} \qquad \text{et } f(v^*) = -12.$$

Les différentes enveloppes de la région S sont représentées à la figure suivante.

$$\text{Minimiser } f(x) = \begin{cases} x_1 - 6x_2 + 54 & \text{si } x_1 \leq 15 \\ -3x_1 - 6x_2 + 114 & \text{si } x_1 \geq 15 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lrrrl} \text{sc:} & -x_1 & & \leq 0 & (1) \\ & & -x_2 & \leq 0 & (2) \\ & x_1 & -4x_2 & \leq 0 & (3) \\ & -10x_1 & +7x_2 & \leq 0 & (4) \\ & -2x_1 & +11x_2 & \leq 96 & (5) \\ & 7x_1 & +2x_2 & \leq 150 & (6) \end{array}$$



CHAPITRE 3

APPLICATIONS

Dans ce chapitre, nous présenterons dans une première partie des exemples résolus par la méthode proposée par Falk et Hoffman.
On y indique les différents points engendrés lors de la recherche.

Dans la seconde partie, on présentera des exemples résolus par la méthode de Arabzadeh.
On imprimera les différentes contraintes utilisées pour former le premier polyèdre enveloppant la région admissible S, ainsi que les sommets de ce polyèdre.
Il s'agit là de la première étape importante de l'algorithme.
La seconde étape nous conduira à la solution optimale du problème (P).

Des tableaux résumant les principaux résultats de ces tests seront présentés à la fin de chaque paragraphe.

1. Applications de la méthode de Falk ~ Hoffman

```
EXEMPLE no 1.
===============

                             2            2
Minimiser f(x)= -(x(1)-8)   - (x(2)+1)

A = (  -1.       0.     )        B = (  0.      )
    (   0.      -1.     )            (  0.      )
    ( -10.       3.     )            (  0.      )
    ( -10.      14.     )            ( 55.      )
    (  -1.       6.     )            ( 40.      )
    (   0.211    2.     )            ( 17.686 )
    (   1.289    3.     )            ( 36.260 )
    (   1.5      1.727 )             ( 30.724 )
    (   2.       1.351 )             ( 36.208 )
    (   2.      -0.078 )             ( 31.922 )
    (   1.     -16.     )            (  0.      )

 POINT=  0.000000E+00    0.000000E+00
     K=   1FVAL= -0.650000E+02

 POINT=  0.838199E+02    0.000000E+00
     K=   2FVAL= -0.574966E+04

 POINT=  0.000000E+00    0.884300E+01
     K=   3FVAL= -0.160885E+03

 POINT=  0.159610E+02    0.000000E+00
     K=   4FVAL= -0.643775E+02

 POINT=  0.162391E+02    0.712978E+01
     K=   5FVAL= -0.133975E+03

 POINT=  0.599477E+01    0.821055E+01
     K=   6FVAL= -0.888552E+02

 POINT=  0.000000E+00    0.392857E+01
     K=   7FVAL= -0.882908E+02

 POINT=  0.161616E+02    0.514258E+01
     K=   8FVAL= -0.104342E+03

 POINT=  0.100062E+02    0.778735E+01
     K=   9FVAL= -0.812422E+02

 POINT=  0.160780E+02    0.299930E+01
     K=  10FVAL= -0.812480E+02

 POINT=  0.140040E+02    0.606963E+01
     K=  11FVAL= -0.860273E+02

 POINT=  0.799633E+01    0.799939E+01
     K=  12FVAL= -0.809890E+02

 POINT=  0.500000E+01    0.750000E+01
     K=  13FVAL= -0.812500E+02

 POINT=  0.150000E+01    0.500000E+01
     K=  14FVAL= -0.782500E+02

 POINT=  0.000000E+00    0.000000E+00
     K=  15FVAL= -0.650000E+02

 POINT=  0.147272E+02    0.499895E+01
     K=  16FVAL= -0.812427E+02

 POINT=  0.129957E+02    0.650283E+01
     K=  17FVAL= -0.812499E+02

 KMIN=   13    F(KMIN)= -0.8125000D+02
 ====================================

 LA SOLUTION OPTIMALE DU PROBLEME EST :
 ======================================

  0.5000000D+01
  0.7500000D+01
 LE NOMBRE D'OPERATIONS DE PIVOTAGE EST:   46
 ============================================

 LE NOMBRE D'EVALUATIONS DE LA FONCTION EST   17
 ================================================

 LE NOMBRE DE SOMMETS ENGENDRES EST:     17
 ========================================

 ENSEMBLE DES CONTRAINTES RESTANTES: 256
 ========================================
```

EXEMPLE no 2.
==============

Minimiser $f(x)= -(x(1)-1)^2 - (x(2))^2 - (x(3)-1)^2$

sc $A*x<=B$

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 12 & 5 & 12 \\ 12 & 12 & 7 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 34.8 \\ 29.1 \\ -4.1 \end{pmatrix}$$

```
POINT=  0.728571E+00   0.000000E+00   0.271429E+00
    K=  1FVAL= -0.604490E+00

POINT=  0.986713E+00   0.903497E+00   0.916783E+00
    K=  2FVAL= -0.823408E+00

POINT=  0.107037E+01   0.000000E+00   0.232222E+01
    K=  3FVAL= -0.175322E+01

POINT=  0.442000E+01   0.000000E+00  -0.342000E+01
    K=  4FVAL= -0.312328E+02

POINT=  0.100000E+01   0.900000E+00   0.900000E+00
    K=  5FVAL= -0.820000E+00

POINT=  0.190000E+01   0.000000E+00   0.900000E+00
    K=  6FVAL= -0.820000E+00

POINT=  0.100000E+01   0.000000E+00   0.000000E+00
    K=  7FVAL= -0.100000E+01

POINT=  0.103333E+01   0.400000E+00   0.170000E+01
    K=  8FVAL= -0.651111E+00

POINT=  0.100000E+01   0.000000E+00   0.190000E+01
    K=  9FVAL= -0.810000E+00

POINT=  0.176000E+01   0.000000E+00   0.114000E+01
    K= 10FVAL= -0.597200E+00

KMIN=    7    F(KMIN)= -0.1000000D+01
==================================


LA SOLUTION OPTIMALE DU PROBLEME EST :
=====================================

 0.1000000D+01
 0.0000000D+00
 0.0000000D+00
LE NOMBRE D'OPERATIONS DE PIVOTAGE EST:  15
===========================================

LE NOMBRE D'EVALUATIONS DE LA FONCTION EST  10
==============================================

LE NOMBRE DE SOMMETS ENGENDRES EST:    10
=======================================

ENSEMBLE DES CONTRAINTES RESTANTES: 160
=======================================
```

```
EXEMPLE no 3.
=============
                           2            2            2
Minimiser f(x)= -(x(1))  - (x(2)-1)  - (x(3)-1)

                    sous   A*x <= B

A = ( -1   0   0 )          B = ( 0 )
    (  0  -1   0 )              ( 0 )
    (  0   0  -1 )              ( 0 )
    (  1  -1  -1 )              ( 0 )
    (  0   1  -1 )              ( 2 )
    (  0   1   3 )              ( 6 )
    (  1   1   1 )              ( 4 )

 POINT=  0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
     K=  1FVAL= -0.200000E+01

 POINT=  0.400000E+01   0.000000E+00   0.000000E+00
     K=  2FVAL= -0.180000E+02

 POINT=  0.000000E+00   0.400000E+01   0.000000E+00
     K=  3FVAL= -0.100000E+02

 POINT=  0.000000E+00   0.000000E+00   0.400000E+01
     K=  4FVAL= -0.100000E+02

 POINT=  0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
     K=  5FVAL= -0.200000E+01

 POINT=  0.200000E+01   0.200000E+01   0.000000E+00
     K=  6FVAL= -0.600000E+01

 POINT=  0.200000E+01   0.000000E+00   0.200000E+01
     K=  7FVAL= -0.600000E+01

 POINT=  0.200000E+01   0.200000E+01   0.000000E+00
     K=  8FVAL= -0.600000E+01

 POINT=  0.000000E+00   0.200000E+01   0.000000E+00
     K=  9FVAL= -0.200000E+01

 POINT=  0.000000E+00   0.300000E+01   0.100000E+01
     K= 10FVAL= -0.400000E+01

 POINT=  0.200000E+01   0.000000E+00   0.200000E+01
     K= 11FVAL= -0.600000E+01

 POINT=  0.000000E+00   0.300000E+01   0.100000E+01
     K= 12FVAL= -0.400000E+01

 POINT=  0.000000E+00   0.000000E+00   0.200000E+01
     K= 13FVAL= -0.200000E+01

 KMIN=    6   F(KMIN)= -0.6000000D+01
 ===================================


 LA SOLUTION OPTIMALE DU PROBLEME EST :
 ======================================

  0.2000000D+01
  0.2000000D+01
  0.0000000D+00
 LE NOMBRE D'OPERATIONS DE PIVOTAGE EST:  21
 ============================================

 LE NOMBRE D'EVALUATIONS DE LA FONCTION EST  13
 ===============================================

 LE NOMBRE DE SOMMETS ENGENDRES EST:   13
 ========================================

 ENSEMBLE DES CONTRAINTES RESTANTES:   0
 ========================================
@
```

EXEMPLE no 4.
=============

Minimiser $f(x)= -(x(1)-2)^2 - (x(2)-5)^2 - (x(3)+3)^2$

sous $A*x <= B$

```
A = ( -1            0.            0.          )  B = ( 0.          )
    (  0.          -1.            0.          )      ( 0.          )
    (  0.           0.           -1.          )      ( 0.          )
    (  0.44540475  -0.391202      0.36576638  )      ( 3.312519666)
    ( -1.0620001    4.25080005    2.6435429   )      (21.2540025  )
    (  2.66037220  -8.230907284  14.13871844  )      (40.7050876  )
    ( 21.           28.           24.         )      (  168.      )

POINT=  0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
    K=  1FVAL= -0.380000E+02

POINT=  0.800000E+01   0.000000E+00   0.000000E+00
    K=  2FVAL= -0.700000E+02

POINT=  0.000000E+00   0.600000E+01   0.000000E+00
    K=  3FVAL= -0.140000E+02

POINT=  0.000000E+00   0.000000E+00   0.700000E+01
    K=  4FVAL= -0.129000E+03

POINT=  0.599999E+01   0.000000E+00   0.175001E+01
    K=  5FVAL= -0.635625E+02

POINT=  0.000000E+00   0.235646E+01   0.425080E+01
    K=  6FVAL= -0.635624E+02

POINT=  0.000000E+00   0.000000E+00   0.287898E+01
    K=  7FVAL= -0.635624E+02

POINT=  0.743710E+01   0.000000E+00   0.000000E+00
    K=  8FVAL= -0.635621E+02

POINT=  0.766064E+01   0.254517E+00   0.000000E+00
    K=  9FVAL= -0.635625E+02

POINT=  0.600000E+01   0.000000E+00   0.175000E+01
    K= 10FVAL= -0.635625E+02

KMIN=    5    F(KMIN)= -0.6356250D+02
==================================


LA SOLUTION OPTIMALE DU PROBLEME EST :
======================================

 0.5999990D+01
 0.0000000D+00
 0.1750009D+01
LE NOMBRE D'OPERATIONS DE PIVOTAGE EST:  15
============================================

LE NOMBRE D'EVALUATIONS DE LA FONCTION EST  10
===============================================

LE NOMBRE DE SOMMETS ENGENDRES EST:   10
========================================

ENSEMBLE DES CONTRAINTES RESTANTES:   2
```

Exemple n°	Type de la fonction objective	Taille (m x n)	Nombre d'itérations	Nombre d'opérations de pivotage	Nombre d'évaluations de la fonction	Nombre de contraintes restantes	Temps C.P.U.
1	quadratique	11 x 2	9	46	17	1	1.17
2	quadratique	8 x 3	4	15	10	2	0.73
3	quadratique	7 x 3	5	21	13	0	0.71
4	quadratique	7 x 3	4	15	10	1	0.67

2. Applications de la méthode de Arabzadeh

EXEMPLE NO 1.

MINIMISER $F(X) = -(X(1)-8)^2 - (X(2)+1)^2$

```
A = (  -1.        0.      )        B = (  0.      )
    (   0.       -1.      )            (  0.      )
    ( -10.        3.      )            (  0.      )
    ( -10.       14.      )            ( 55.      )
    (  -1.        6.      )            ( 40.      )
    (   0.211     2.      )            ( 17.686   )
    (   1.289     3.      )            ( 36.260   )
    (   1.5       1.727   )            ( 30.724   )
    (   2.        1.351   )            ( 36.208   )
    (   2.       -0.078   )            ( 31.922   )
    (   1.      -16.      )            (  0.      )
```

LES 3 CONTRAINTES

```
-0.1000000D+02 0.3000000D+01 0.0000000D+00
 0.2110000D+00 0.2000000D+01 0.1768600D+02
 0.1000000D+01-0.1600000D+02 0.0000000D+00
```

SONT UTILISEES POUR TROUVER LES 3 SOMMETS SUIVANTS

```
0.0000000D+00 0.0000000D+00
0.5263690D+02 0.3289807D+01
0.2571512D+01 0.8571706D+01
```

APRES AVOIR FORME LE POLYHEDRE CR= 984

RECHERCHE DE LA SOLUTION OPTIMALE

LA SOLUTION OPTIMALE TROUVEE EN 7 ITERATIONS EST LE SOMMET

5.000

7.500

LA VALEUR OPTIMALE DE F(X) EST: -0.812500E+02

NOMBRE DE SYSTEMES RESOLUS: 29

NOMBRE D'EVALUATIONS DE LA FONCTION: 15

L'ENSEMBLE DES CONTRAINTES RESTANTES: 0

CPU TIME: 0.65

EXEMPLE NO 2.

$$\text{MINIMISER } F(X) = -(X(1)-1)^2 - (X(2))^2 - (X(3)-1)^2$$

SC A*X<=B

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 12 & 5 & 12 \\ 12 & 12 & 7 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 34.8 \\ 29.1 \\ -4.1 \end{pmatrix}$$

LES 5 CONTRAINTES

```
 0.0000000D+00-0.1000000D+01 0.0000000D+00 0.0000000D+00
 0.1000000D+01 0.1000000D+01-0.1000000D+01 0.1000000D+01
-0.1000000D+01 0.1000000D+01-0.1000000D+01-0.1000000D+01
 0.1200000D+02 0.1200000D+02 0.7000000D+01 0.2910000D+02
-0.6000000D+01 0.1000000D+01 0.1000000D+01-0.4100000D+01
```

SONT UTILISEES POUR TROUVER LES 6 SOMMETS SUIVANTS

```
0.9867133D+00 0.9034965D+00 0.9167832D+00
0.7285714D+00 0.0000000D+00 0.2714286D+00
0.1000000D+01 0.0000000D+00 0.0000000D+00
0.1070370D+01 0.0000000D+00 0.2322222D+01
0.1900000D+01 0.0000000D+00 0.9000000D+00
0.1000000D+01 0.9000000D+00 0.9000000D+00
```

APRES AVOIR FORME LE POLYHEDRE CR= 32

RECHERCHE DE LA SOLUTION OPTIMALE

LA SOLUTION OPTIMALE TROUVEE EN 2 ITERATIONS EST LE SOMMET

1.000

0.000

0.000

LA VALEUR OPTIMALE DE F(X) EST: -0.100000E+01

NOMBRE DE SYSTEMES RESOLUS: 23

NOMBRE D'EVALUATIONS DE LA FONCTION: 9

L'ENSEMBLE DES CONTRAINTES RESTANTES: 0

CPU TIME: 0.68

EXEMPLE NO 3.

$$\text{MINIMISER } F(X) = -(X(1))^2 - (X(2)-1)^2 - (X(3)-1)^2$$

SOUS A*X <= B

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

LES 6 CONTRAINTES

```
-0.1000000D+01 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00
 0.0000000D+00-0.1000000D+01 0.0000000D+00 0.0000000D+00
 0.0000000D+00 0.0000000D+00-0.1000000D+01 0.0000000D+00
 0.1000000D+01-0.1000000D+01-0.1000000D+01 0.0000000D+00
 0.0000000D+00 0.1000000D+01-0.1000000D+01 0.2000000D+01
 0.1000000D+01 0.1000000D+01 0.1000000D+01 0.4000000D+01
```

SONT UTILISEES POUR TROUVER LES 6 SOMMETS SUIVANTS

```
0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00
0.2000000D+01 0.2000000D+01 0.0000000D+00
0.0000000D+00 0.3000000D+01 0.1000000D+01
0.0000000D+00 0.2000000D+01 0.0000000D+00
0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.4000000D+01
0.2000000D+01 0.0000000D+00 0.2000000D+01
```

APRES AVOIR FORME LE POLYHEDRE CR= 32

RECHERCHE DE LA SOLUTION OPTIMALE

LA SOLUTION OPTIMALE TROUVEE EN 2 ITERATIONS EST LE SOMMET

2.000

2.000

0.000

LA VALEUR OPTIMALE DE F(X) EST: -0.600000E+01

LE SOMMET SUIVANT EST AUSSI SOLUTION OPTIMALE DU PROBLEME POSE:

2.000

0.000

2.000

NOMBRE DE SYSTEMES RESOLUS: 31

NOMBRE D'EVALUATIONS DE LA FONCTION: 7

L'ENSEMBLE DES CONTRAINTES RESTANTES: 0

CPU TIME: 0.68

EXEMPLE NO 4.

$$\text{MINIMISER } F(X) = -(X(1)-2)^2 - (X(2)-5)^2 - (X(3)+3)^2$$

SOUS A*X <= B

```
A = ( -1            0.            0.          )   B = (  0.         )
    (  0.          -1.            0.          )       (  0.         )
    (  0.           0.           -1.          )       (  0.         )
    (  0.44540475  -0.391202      0.36576638  )       ( 3.312519666)
    ( -1.0620001    4.25080005    2.6435429   )       (21.2540025   )
    (  2.66037220  -8.230907284  14.13871844  )       (40.7050876   )
    ( 21.          28.           24.          )       (   168.      )
```

LES 5 CONTRAINTES

-0.1000000D+01	0.0000000D+00	0.0000000D+00	0.0000000D+00
0.0000000D+00	-0.1000000D+01	0.0000000D+00	0.0000000D+00
0.0000000D+00	0.0000000D+00	-0.1000000D+01	0.0000000D+00
0.4454047D+00	-0.3912020D+00	0.3657664D+00	0.3312520D+01
0.2100000D+02	0.2800000D+02	0.2400000D+02	0.1680000D+03

SONT UTILISEES POUR TROUVER LES 6 SOMMETS SUIVANTS

0.0000000D+00	0.0000000D+00	0.0000000D+00
0.7437100D+01	0.0000000D+00	0.0000000D+00
0.0000000D+00	0.6000000D+01	0.0000000D+00
0.0000000D+00	0.0000000D+00	0.7000000D+01
0.7660644D+01	0.2545170D+00	0.0000000D+00
0.6000000D+01	0.0000000D+00	0.1750000D+01

APRES AVOIR FORME LE POLYHEDRE CR= 48

RECHERCHE DE LA SOLUTION OPTIMALE

LA SOLUTION OPTIMALE TROUVEE EN 2 ITERATIONS EST LE SOMMET

6.000

0.000

1.750

LA VALEUR OPTIMALE DE F(X) EST: -0.635625E+02

NOMBRE DE SYSTEMES RESOLUS: 13

NOMBRE D'EVALUATIONS DE LA FONCTION: 9

L'ENSEMBLE DES CONTRAINTES RESTANTES: 16

CPU TIME: 0.73

```
EXEMPLE NO 5.
==============

                       T  T
MINIMISER F(X)= C*X - X D DX

          SOUS   A*X <= B

A =  ( -1  0  0  0  0 )                  B = (   0 )
     (  0 -1  0  0  0 )                      (   0 )
     (  0  0 -1  0  0 )                      (   0 )
     (  0  0  0 -1  0 )                      (   0 )
     (  0  0  0  0 -1 )                      (   0 )
     ( -1 -1 -2 -1 -1 )                      ( -10 )
     ( -2 -3  0  0  1 )                      (  -8 )
     (  0 -1 -4  1 -2 )                      ( -12 )
     ( -8  1  1 -6  0 )                      ( -20 )
     (  2  1  3  1  1 )                      (  30 )

C = ( 10 10 10 10 10 )

D = ( 1 2 5 2 2 )
    ( 2 3 1 2 7 )
    ( 2 2 2 2 1 )
    ( 3 4 1 2 3 )
    ( 4 1 2 2 6 )

LES  8 CONTRAINTES
===================

-0.1000000D+01 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00
 0.0000000D+00
 0.0000000D+00-0.1000000D+01 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00
 0.0000000D+00
 0.0000000D+00 0.0000000D+00-0.1000000D+01 0.0000000D+00 0.0000000D+00
 0.0000000D+00
 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00-0.1000000D+01 0.0000000D+00
 0.0000000D+00
 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00-0.1000000D+01
 0.0000000D+00
 0.0000000D+00-0.1000000D+01-0.4000000D+01 0.1000000D+01-0.2000000D+01
-0.1200000D+02
-0.8000000D+01 0.1000000D+01 0.1000000D+01-0.6000000D+01 0.0000000D+00
-0.2000000D+02
 0.2000000D+01 0.1000000D+01 0.3000000D+01 0.1000000D+01 0.1000000D+01
 0.3000000D+02

UTILISEES POUR TROUVER LES 18 SOMMETS SUIVANTS
==============================================

 0.4000000D+01 0.1200000D+02 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00
 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.3333333D+01 0.2666667D+02
 0.2875000D+01 0.0000000D+00 0.3000000D+01 0.0000000D+00 0.0000000D+00
 0.0000000D+00 0.1840000D+02 0.0000000D+00 0.6400000D+01 0.0000000D+00
 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.8421053D+01 0.4736842D+01 0.0000000D+00
 0.2500000D+01 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.6000000D+01
 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.4000000D+01 0.4000000D+01 0.0000000D+00
 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.3333333D+01 0.7666667D+01
 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.1600000D+02 0.1400000D+02
 0.5000000D+01 0.2000000D+02 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00
 0.9000000D+01 0.1200000D+02 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00
 0.2500000D+01 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.2500000D+02
 0.3461538D+01 0.0000000D+00 0.7692308D+01 0.0000000D+00 0.0000000D+00
 0.1050000D+02 0.0000000D+00 0.3000000D+01 0.0000000D+00 0.0000000D+00
 0.0000000D+00 0.2285714D+02 0.0000000D+00 0.7142857D+01 0.0000000D+00
 0.0000000D+00 0.2100000D+02 0.0000000D+00 0.9000000D+01 0.0000000D+00
 0.1200000D+02 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.6000000D+01
 0.0000000D+00 0.0000000D+00 0.6000000D+01 0.1200000D+02 0.0000000D+00

APRES AVOIR FORME LE POLYHEDRE  CR=       96
==================================================

RECHERCHE DE LA SOLUTION OPTIMALE

LA SOLUTION OPTIMALE TROUVEE EN  2 ITERATIONS EST LE SOMMET
============================================================

 0.0000000D+00

 0.8320000D+01

 0.0000000D+00

 0.4720000D+01

 0.1696000D+02

LA VALEUR OPTIMALE DE F(X) EST: -0.5164417D+05
============================================

NOMBRE DE SYSTEMES RESOLUS:   45
=============================

NOMBRE D'EVALUATIONS DE LA FONCTION:   33
========================================

L'ENSEMBLE DES CONTRAINTES RESTANTES:        32
=============================================

CPU TIME 1.09
```

EXEMPLE NO 6.
==============

```
                                    T T
MINIMISER F(X)= C*X - 0.1 X D DX

             SOUS   A*X <= B

A=   (  -1   0   0   0   0   0   0   0   0   0 )   B= (      0. )

     (   0  -1   0   0   0   0   0   0   0   0 )      (      0. )
     (   0   0  -1   0   0   0   0   0   0   0 )      (      0. )
     (   0   0   0  -1   0   0   0   0   0   0 )      (      0. )
     (   0   0   0   0  -1   0   0   0   0   0 )      (      0. )
     (   0   0   0   0   0  -1   0   0   0   0 )      (      0. )
     (   0   0   0   0   0   0  -1   0   0   0 )      (      0. )
     (   0   0   0   0   0   0   0  -1   0   0 )      (      0. )
     (   0   0   0   0   0   0   0   0  -1   0 )      (      0. )
     (   0   0   0   0   0   0   0   0   0  -1 )      (      0. )
     (  20  20  60  60  60  60   5  45  55  65 )      (   600.1)
     (   5   7   3   8  13  13   2  14  14  14 )      (   310.5)
     ( 100 130  50  70  70  70  20  80  80  80 )      ( 1800   )
     ( 200 280 100 200 250 280 100 180 200 220 )      ( 3850   )
     (   2   2   4   4   4   4   2   6   6   6 )      (    18.6)
     (   4   8   2   6  10  10   5  10  10  10 )      (   198.7)
     (  60 110  20  40  60  70  10  40  50  50 )      (  882   )
     ( 150 210  40  70  90 105  60 100 140 180 )      ( 4200   )
     (  80 100   6  16  20  22   0  20  30  30 )      (   402.5)
     (  40  40  12  20  24  28   0   0  40  50 )      (  327   )

C = (10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 )

 D = ( 1 5 2 2 2 1 5 2 2 2 )
     ( 2 1 7 3 2 2 1 7 3 2 )
     ( 2 2 1 2 2 2 2 1 2 2 )
     ( 3 1 3 4 2 3 1 3 4 2 )
     ( 4 2 6 1 2 4 2 6 1 2 )
     ( 2 2 1 5 2 2 2 1 5 2 )
     ( 3 2 2 1 7 3 2 2 1 7 )
     ( 4 2 3 1 3 4 2 3 1 3 )
     ( 1 2 4 2 6 1 2 4 2 6 )
```

LES 11 CONTRAINTES
===================

```
 -0.10000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00
  0.00000000D+00-0.10000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00-0.10000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00-0.10000000D+01 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00-0.10000000D+01
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
 -0.10000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00-0.10000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00-0.10000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00-0.10000000D+01 0.00000000D+00
  0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00-0.10000000D+01
  0.00000000D+00
  0.20000000D+01 0.20000000D+01 0.40000000D+01 0.40000000D+01 0.40000000D+01
  0.40000000D+01 0.20000000D+01 0.60000000D+01 0.60000000D+01 0.60000000D+01
  0.18600000D+02
```

```
 UTILISEES POUR TROUVER LES 11 SOMMETS SUIVANTS
================================================

• 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
• 0.93000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
• 0.00000000D+00 0.93000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
• 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.46500000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
• 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.46500000D+01 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
• 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.46500000D+01
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
• 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.46500000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
• 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.93000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
• 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.31000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00
• 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.31000000D+01 0.00000000D+00
• 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.31000000D+01

 APRES AVOIR FORME LE POLYHEDRE  CR= 1031168
===================================================

 RECHERCHE DE LA SOLUTION OPTIMALE



 LA SOLUTION OPTIMALE TROUVEE EN  2 ITERATIONS EST LE SOMMET
==============================================================

  0.00000000D+00

  0.40250000D+01

  0.00000000D+00

  0.00000000D+00

  0.00000000D+00

  0.00000000D+00

  0.52750000D+01

  0.00000000D+00

  0.00000000D+00

  0.00000000D+00

 LA VALEUR OPTIMALE DE F(X) EST: -0.3480990D+03
=============================================

 NOMBRE DE SYSTEMES RESOLUS:   30
==================================

 NOMBRE D'EVALUATIONS DE LA FONCTION:   29
============================================

 L'ENSEMBLE DES CONTRAINTES RESTANTES:    769024
==============================================

CPU TIME 1.29
```

```
EXEMPLE NO 7.
===============

                                      T T
MINIMISER F(X)= C*X - 0.1 X D DX

           SOUS   A*X <= B

A=   (  -1    0    0    0    0    0    0    0    0    0 )    B= (    0. )
     (   0   -1    0    0    0    0    0    0    0    0 )       (    0. )
     (   0    0   -1    0    0    0    0    0    0    0 )       (    0. )
     (   0    0    0   -1    0    0    0    0    0    0 )       (    0. )
     (   0    0    0    0   -1    0    0    0    0    0 )       (    0. )
     (   0    0    0    0    0   -1    0    0    0    0 )       (    0. )
     (   0    0    0    0    0    0   -1    0    0    0 )       (    0. )
     (   0    0    0    0    0    0    0   -1    0    0 )       (    0. )
     (   0    0    0    0    0    0    0    0   -1    0 )       (    0. )
     (   0    0    0    0    0    0    0    0    0   -1 )       (    0. )
     (  20   20   60   60   60   60    5   45   55   65 )       (  600.1)
     (   5    7    3    8   13   13    2   14   14   14 )       (  310.5)
     ( 100  130   50   70   70   70   20   80   80   80 )       ( 1800   )
     ( 200  280  100  200  250  280  100  180  200  220 )       ( 3850   )
     (   2    2    4    4    4    4    2    6    6    6 )       (   18.6)
     (   4    8    2    6   10   10    5   10   10   10 )       (  198.7)
     (  60  110   20   40   60   70   10   40   50   50 )       (  882   )
     ( 150  210   40   70   90  105   60  100  140  180 )       ( 4200   )
     (  80  100    6   16   20   22    0   20   30   30 )       (  402.5)
     (  40   40   12   20   24   28    0    0   40   50 )       (  327   )

C = (10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 )

D = (  .1   .3   .2  -.01   .0   .2   .6   .0   -.1   1. )
    (  .2   .5   .3  -.2    .0   .0   .7   .2   -.2   .1)
    (  .3  -.3   .5  -.3    .0   .0   .4  -.4   -.3   .2)
    ( -.4  -.2  -.3  -.4    .3   .3   .1   .0   -.4  -1.)
    (  .0   .4   .0  -.5    .2   .0   .0   .0   -.5   .1)
    (  .1   .2   .3   .0   1.    .6   .1   .2    .1   .0)
    (  .2   .3   .5   .0    .1   .7   .2   .0    .2   .2)
    (  .3   .5  -.3   .0    .2   .4   .3   .0    .3  -.4)
    ( -.4  -.3  -.2   .3   -.1   .1   .4   .3    .4   .0)
    (  .0   .0   .4   .2    .1   .0   .5   .0    .5   .0)


LES 11 CONTRAINTES
====================

• -0.10000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
   0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
   0.00000000D+00
•  0.00000000D+00-0.10000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
   0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
   0.00000000D+00
•  0.00000000D+00 0.00000000D+00-0.10000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00
   0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
   0.00000000D+00
•  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00-0.10000000D+01 0.00000000D+00
   0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
   0.00000000D+00
•  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00-0.10000000D+01
   0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
   0.00000000D+00
•  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
  -0.10000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
   0.00000000D+00
•  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
   0.00000000D+00-0.10000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
   0.00000000D+00
•  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
   0.00000000D+00 0.00000000D+00-0.10000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00
   0.00000000D+00
•  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
   0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00-0.10000000D+01 0.00000000D+00
   0.00000000D+00
•  0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
   0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00-0.10000000D+01
   0.00000000D+00
•  0.20000000D+01 0.20000000D+01 0.40000000D+01 0.40000000D+01 0.40000000D+01
   0.40000000D+01 0.20000000D+01 0.60000000D+01 0.60000000D+01 0.60000000D+01
   0.18600000D+02
```

```
UTILISÉES POUR TROUVER LES 11 SOMMETS SUIVANTS
===============================================

0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.93000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.93000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.46500000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.46500000D+01 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.46500000D+01
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.46500000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.93000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.31000000D+01 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.31000000D+01 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00
0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.00000000D+00 0.31000000D+01

APRES AVOIR FORME LE POLYHEDRE  CR= 1031168
==================================================

RECHERCHE DE LA SOLUTION OPTIMALE


LA SOLUTION OPTIMALE TROUVEE EN  1 ITERATIONS EST LE SOMMET
============================================================

0.00000000D+00

0.00000000D+00

0.00000000D+00

0.00000000D+00

0.00000000D+00

0.00000000D+00

0.00000000D+00

0.00000000D+00

0.00000000D+00

0.00000000D+00

LA VALEUR OPTIMALE DE F(X) EST:  0.00000000D+00
=============================================

NOMBRE DE SYSTEMES RESOLUS:    12
==================================

NOMBRE D'EVALUATIONS DE LA FONCTION:    11
============================================

L'ENSEMBLE DES CONTRAINTES RESTANTES:    1031168
=============================================

CPU TIME 1.09
@
```

EXEMPLE NO 8

$$\text{MINIMISER } F(X)= X(1)^{.5} + 2\,X(2)^{.25}$$

SOUS A*X <= B

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

LES 5 CONTRAINTES

```
-0.1000000D+01 0.0000000D+00 0.0000000D+00
 0.0000000D+00-0.1000000D+01 0.0000000D+00
-0.1000000D+01-0.1000000D+01-0.3000000D+01
 0.1000000D+01 0.0000000D+00 0.6000000D+01
 0.0000000D+00 0.1000000D+01 0.5000000D+01
```

SONT UTILISEES POUR TROUVER LES 5 SOMMETS SUIVANTS

```
0.0000000D+00 0.5000000D+01
0.3000000D+01 0.0000000D+00
0.0000000D+00 0.3000000D+01
0.6000000D+01 0.5000000D+01
0.6000000D+01 0.0000000D+00
```

APRES AVOIR FORME LE POLYHEDRE CR= 0

RECHERCHE DE LA SOLUTION OPTIMALE

LA SOLUTION OPTIMALE TROUVEE EN 1 ITERATIONS EST LE SOMMET

3.000

0.000

LA VALEUR OPTIMALE DE F(X) EST: 0.173205E+01

NOMBRE DE SYSTEMES RESOLUS: 10

NOMBRE D'EVALUATIONS DE LA FONCTION: 5

L'ENSEMBLE DES CONTRAINTES RESTANTES: 0

CPU TIME: 0.62

EXEMPLE NO 9.

```
MINIMISER F(X)=  X(1) - 6.X(2) + 54    SI  X(1)<=15
               -3X(1) - 6.X(2) + 114   SI  X(1)>=15

               SOUS   A*X <= B

A = (   -1.       0.     )      B = (   0.     )
    (    0.      -1.     )          (   0.     )
    (  -10.       3.     )          (   0.     )
    (  -10.      14.     )          (  55.     )
    (   -1.       6.     )          (  40.     )
    (    0.211    2.     )          (  17.686  )
    (    1.289    3.     )          (  36.260  )
    (    1.5      1.727  )          (  30.724  )
    (    2.       1.351  )          (  36.208  )
    (    2.      -0.078  )          (  31.922  )
    (    1.     -16.     )          (   0.     )
```

LES 3 CONTRAINTES

```
-0.1000000D+02 0.3000000D+01 0.0000000D+00
 0.2110000D+00 0.2000000D+01 0.1768600D+02
 0.1000000D+01-0.1600000D+02 0.0000000D+00
```

SONT UTILISEES POUR TROUVER LES 3 SOMMETS SUIVANTS

```
 0.0000000D+00 0.0000000D+00
 0.5263690D+02 0.3289807D+01
 0.2571512D+01 0.8571706D+01
```

APRES AVOIR FORME LE POLYHEDRE CR=   984

RECHERCHE DE LA SOLUTION OPTIMALE

LA SOLUTION OPTIMALE TROUVEE EN 6 ITERATIONS EST LE SOMMET

7.996

7.999

LA VALEUR OPTIMALE DE F(X) EST: -0.479994E+02

NOMBRE DE SYSTEMES RESOLUS: 27

NOMBRE D'EVALUATIONS DE LA FONCTION: 11

~~L'ENSEMBLE DES CONTRAINTES RESTANTES: 512~~

CPU TIME: 0.73

Exemple n°	Type de la fonction objective	Taille (m x n)	Recherche du polyèdre enveloppant			Recherche de la solution optimale		Nombre de systèmes résolus	Nombre d'évaluations de la fonction objective	Temps C.P.U.
			# contr. utilisées	# sommets du polyèdre	# itérations	# contr. restantes	# itérations			
1.	quadratique	11 x 2	3	3	4	0	7	29	15	0.65
2	quadratique	8 x 3	5	6	5	0	2	23	9	0.68
3	quadratique	7 x 3	6	6	4	0	2	31	7	0.68
4	quadratique	7 x 3	5	6	3	1	2	13	9	0.73
5	quadratique	10 x 5	8	18	4	1	2	45	33	1.09
6	quadratique	20 x 10	11	11	2	8	2	30	29	1.29
7	quadratique	20 x 10	11	11	2	9	1	12	11	1.09
8	non linéaire	5 x 2	5	5	4	0	1	10	5	0.62
9	linéaire par morceaux	11 x 2	3	3	4	1	6	27	11	0.73

3. Conclusion

Différents exemples ont été résolus par les deux méthodes présentées, pour lesquelles des algorithmes ont été programmés.
Comparons ces résultats dans un tableau où l'on reprendra les principales caractéristiques de chacune des méthodes.

Dans le tableau 3, on indique par :

- NPIVOT : le nombre d'opérations de pivotage effectuées lors de la résolution par la méthode de Falk et Hoffman.
- NS : le nombre de systèmes linéaires résolus lors de l'utilisation de la seconde méthode.
- NF : le nombre d'évaluations de la fonction objectif.
- NCR : le nombre de contraintes restantes après avoir trouvé une solution optimale au problème.

Certains exemples ne peuvent être résolus par la méthode de Falk et Hoffman car l'algorithme utilise deux sous-routines extérieures pour la résolution d'un problème de programmation linéaire et l'une de ces sous-routines est seulement utilisable pour des problèmes ayant au plus 10 variables et 10 contraintes.

On peut également rencontrer des problèmes avec cette première méthode lorsque la fonction objectif comporte des puissances non entières. En effet, il y a quelques problème lorsqu'on doit calculer la valeur de la fonction objectif en des points qui ne satisfont pas les contraintes de non-négativité.
Ceci n'arrive pas lors de l'utilisation de la seconde méthode car généralement, ces contraintes de non-négativité font partie des contraintes courantes dès le départ; les sommets calculés ultérieurement satisfont donc ces contraintes.

La méthode 1 ne s'applique pas à tous les cas à cause de l'hypothèse de non-dégénérescence des sommets de S. C'est ainsi qu'elle ne peut s'appliquer à l'exemple résolu à la page 107, car l'origine est un sommet dégénéré du domaine admissible.

Références

[1] ARABZADEH, M.R: "Minimization of a quasi-concave function on Bounded or unbounded polyedral polyhedral sets". (1981)

[2] FALK, J. and HOFFMAN, K: "A successive underestimation method for concave minimization problems". Math. Op. Res, 1. (1976) 251 - 259.

[3] FALK, J and HOFFMAN, K: "Concave minimization via collapsing polytopes." Math. Op. Res. (1982)

[4] FALK, J and SOLAND, R: "An algorithm for Separable Non-convex Problems. Management Sci 15 (1969)

[5] Mac CORMICK, GP: "Algorithmic and computational aspects of the use of optimization methods in Engineering Design" Computers and structures (1973)

[6] TUY, H: "Concave programming under Linear constraints". Soviet Math. Dokl. (1964).

Minimisation d'une fonction concave
sur un ensemble polyédral borné.

QUINTIN Huguette.

ERRATA.

page 107: minimiser $f(x) = \begin{cases} x_1 - 6x_2 + 54 & \text{si } x_1 \leq 15 \\ -3x_1 - 6x_2 + 114 & \text{si } x_1 \geq 15 \end{cases}$

page 110 : étape 1 : $V^1 = \{34, 36, 56, 45\}$

page 129 : exemple n° 9.

minimiser $f(x) = \begin{cases} x_1 - 7x_2 & \text{si } x_1 \leq 11.5 \\ -7.5x_1 - 7x_2 + 97.75 & \text{si } 11.5 \leq x_1 \leq 15 \\ -8x_1 - 7x_2 + 105.25 & \text{si } x_1 \geq 15 \end{cases}$